INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIX. BAND SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT 1960

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 1. Dezember 1960

Postverlagsort Berlin *Preis DM 12,60*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik
Professor Dr. K. Magnus, Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. E. Mettler, Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12
Professor Dr.-Ing. K. v. Sanden, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für das „Ingenieur-Archiv" erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Photokopien: Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 27901

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 830391

Inhalt:

Seite

Bufler, H., und *F. Kießling*, Ein neues Verfahren zur Drehschwingungsberechnung von Kolbenmaschinen bei Berücksichtigung der Torsion zweiter Art. Mit 9 Abbildungen 373

Trostel, R., Genäherte Berechnung von Wärmespannungen mit Hilfe der Variationsprinzipien der Elastostatik. Mit 8 Abbildungen 388

Tondl, A., The Stability of Motion of a Rotor with Unsymmetrical Shaft on an Elastically Supported Mass Foundation. Mit 10 Abbildungen 410

Raasch, J., Die Spannungen in der nur am Rande belasteten, um einen Durchmesser verbogenen Kreisringplatte. Mit 8 Abbildungen 419

Bottema, O., Über die Stabilität der Präzessionsbewegung eines symmetrischen Kreisels. Mit 1 Abbildung 425

Franeck, H.-J., Die Inversion der Torsionsspannungen prismatischer Stäbe in allgemeinen Koordinaten. Mit 6 Abbildungen 428

Falk, S., Klassifikation gedämpfter Schwingungssysteme und Eingrenzung ihrer Eigenwerte. Mit 17 Abbildungen 436

INGENIEUR-ARCHIV

XXIX. BAND SECHSTES (SCHLUSS-)HEFT 1960

Ein neues Verfahren zur Drehschwingungsberechnung von Kolbenmaschinen bei Berücksichtigung der Torsion zweiter Art*

Von H. Bufler und F. Kießling

1. Einführung. Zur Berechnung der Torsionseigenfrequenzen von Maschinenaggregaten sind zahlreiche verschiedenartige Verfahren bekannt[1], denen die Annahme glatter Wellenstücke zwischen den Drehmassen zugrunde liegt. Ein solches Ersatzbild ist bei den Kurbelwellen von Kolbenmaschinen jedoch nicht ohne weiteres zulässig, wie erstmals *R. Grammel*[2] erkannte. Danach hat man bei Kurbelwellen zwischen Torsion erster Art und Torsion zweiter Art zu unterscheiden. Die Torsion erster Art kommt durch allein an den Wellenenden eingeleitete Drehmomente zustande. Die Verformung der Kurbelwelle durch an den Kurbelzapfen angreifende Kräfte bezeichnet man dagegen als Torsion zweiter Art. Da diese den wirklichen Beanspruchungsverhältnissen bei Kolbenmaschinen entspricht, hat eine genaue Schwingungsrechnung hiervon auszugehen. Im Unterschied zur Torsion erster Art hängt hier die Differenz der Drehwinkel zweier benachbarter Drehmassen nicht nur von dem zwischen ihnen wirkenden Drehmoment, sondern auch von allen übrigen Drehmomenten ab. Die Beiträge dieser übrigen Drehmomente zur Gesamttorsion im betrachteten Wellenabschnitt werden als Nebentorsionen bezeichnet.

R. Grammel[3] führt die Schwingungsberechnung bei Zugrundelegung der Torsion zweiter Art mit Hilfe seiner Frequenzfunktionen durch und zeigt den Einfluß der Nebentorsionen auf die Eigenfrequenzen. Insbesondere behandelt er eine homogene Maschine ohne bzw. mit einer Zusatzdrehmasse, wobei er die Nebentorsionen durch eine Störungsrechnung berücksichtigt.

In der vorliegenden Arbeit wird unter Beschränkung auf die primären Nebentorsionen (der Einfluß der übrigen ist vernachlässigbar klein) zunächst die Frequenzdeterminante aufgestellt und ein (schon bekanntes) tabellarisches Lösungsverfahren angegeben. Anschließend wird der praktisch wichtige Fall der homogenen Maschine ohne und mit Zusatzdrehmassen mit Hilfe der trigonometrischen Methode behandelt. Während danach im rein homogenen Fall die Eigenfrequenzen in geschlossener Form streng darstellbar sind, müssen diese beim Vorhandensein von Zusatzdrehmassen aus den Nullstellen transzendenter Gleichungen bestimmt werden. Ferner werden die entsprechenden Formeln für die Momente und Drehwinkel angegeben.

2. Ausgangsgleichungen und Frequenzdeterminante. Das Momentengleichgewicht an der k-ten Scheibe liefert die Bewegungsgleichung

$$M_k - M_{k-1} = \Theta_k \ddot{\varphi}_k \,. \tag{1}$$

Dabei bedeuten Θ_k das polare Massenträgheitsmoment, φ_k den Drehwinkel der k-ten Scheibe sowie M_k und M_{k-1} die Momente in den benachbarten Wellenabschnitten gemäß Abb. 1. Mit dem Ansatz für stationäre Schwingungen

$$\varphi_k = \bar{\varphi}_k \sin \omega t \,,$$

Abb. 1. Allgemeines Drehschwingungssystem mit N Drehmassen.

---

* Die Verfasser sind Herrn Prof. *Grammel* für die Anregung zu dieser Arbeit sehr zu Dank verbunden.

[1] *K. Klotter*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 1.

[2] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 4 (1933) S. 287.

[3] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik Bd. 2 S. 410, 2. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

wobei ω die Eigenkreisfrequenz und t die Zeit sind, geht (1) über in die später mehrmals benötigte Gleichung

$$M_k - M_{k-1} = -\Theta_k \omega^2 \varphi_k . \tag{2}$$

Da die Differenz der Drehwinkel zweier aufeinanderfolgender Scheiben bei der Torsion zweiter Art außer von dem zwischen ihnen wirkenden Torsionsmoment auch von allen übrigen Momenten abhängt, gilt folgende lineare Formänderungsbeziehung:

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k = \delta_{k,1} M_1 + \delta_{k,2} M_2 + \cdots + \delta_{k,k-1} M_{k-1} + \delta_{k,k} M_k + \delta_{k,k+1} M_{k+1} + \cdots + \delta_{k,N-1} M_{N-1} . \tag{3}$$

Die Einflußzahlen $\delta_{k,i}$, welche wegen des komplizierten Aufbaus einer Kurbelwelle durch geeignete Versuche bestimmt werden müssen, sind durch diese Gleichung definiert. Aus dem Satz von Betti folgt, daß die Matrix der Einflußzahlen $\delta_{k,i}$ zur Diagonale symmetrisch ist, d. h.

$$\delta_{k,i} = \delta_{i,k} .$$

Zum Beweis betrachten wir zwei Wellenabschnitte mit den Momenten M_i und M_k, während alle übrigen Momente Null sein sollen. Bringt man zuerst das Moment M_i und dann das Moment M_k auf, so leistet das erstere beim Aufbringen von M_k die Ergänzungsarbeit $\delta_{i,k} M_k M_i$; beim Aufbringen dieser Momente in umgekehrter Reihenfolge leistet M_k die Ergänzungsarbeit $\delta_{k,i} M_i M_k$. Nach dem Satz von Betti müssen beide einander gleich sein, woraus sofort $\delta_{k,i} = \delta_{i,k}$ folgt.

Man bezeichnet in (3) $\delta_{k,k}$ als Einflußzahl der Haupttorsion, $\delta_{k,k-1}$ und $\delta_{k,k+1}$ als Einflußzahlen der primären Nebentorsion, $\delta_{k,k-2}$ und $\delta_{k,k+2}$ als Einflußzahlen der sekundären Nebentorsion usw. Wie *R. Grammel*, *K. Klotter* und *K. von Sanden*[1] zeigen, liegen die Einflußzahlen der primären Nebentorsionen eine Größenordnung, diejenigen der sekundären Nebentorsionen um zwei Größenordnungen usw. tiefer als die Einflußzahl der Haupttorsion. Aus diesem Grunde ist es gerechtfertigt, sich auf die Haupt- und die primäre Nebentorsion zu beschränken. Damit geht (3) über in

$$\varphi_{k+1} - \varphi_k = \delta_{k,k-1} M_{k-1} + \delta_{k,k} M_k + \delta_{k,k+1} M_{k+1} . \tag{4}$$

Eliminiert man nun die Drehwinkel aus (4) mittels (1), so erhält man

$$\delta_{k,k-1} \ddot{M}_{k-1} + \delta_{k,k} \ddot{M}_k + \delta_{k,k+1} \ddot{M}_{k+1} - \frac{M_{k-1}}{\Theta_k} + \left(\frac{1}{\Theta_k} + \frac{1}{\Theta_{k+1}}\right) M_k - \frac{M_{k+1}}{\Theta_{k+1}} = 0 . \tag{5}$$

Mit dem für stationäre Schwingungen gültigen Ansatz

$$M_k = \overline{M_k} \sin \omega t$$

ergibt sich aus (5) folgende Rekursionsformel für die Momente:

$$\left(\frac{1}{\Theta_k} + \omega^2 \delta_{k,k-1}\right) M_{k-1} - \left(\frac{1}{\Theta_k} + \frac{1}{\Theta_{k+1}} - \omega^2 \delta_{k,k}\right) M_k + \left(\frac{1}{\Theta_{k+1}} + \omega^2 \delta_{k,k+1}\right) M_{k+1} = 0 . \tag{6}$$

Bemerkenswerterweise kommen in dieser Formel — wie bei der Torsion erster Art[2] — nur drei aufeinanderfolgende Momente vor.

Schreibt man diese Formel für $k = 1, 2 \ldots N-1$ unter Berücksichtigung der Randbedingungen $M_0 = 0$ und $M_N = 0$ (N Zahl der Drehmassen) an, so erhält man ein lineares homogenes Gleichungssystem für die Drehmomente, welches nur dann eine nichttriviale Lösung besitzt, wenn die zugehörige Determinante der Koeffizienten [siehe (7)] verschwindet. Diese Bedingung liefert die Gleichung zur Bestimmung der Eigenfrequenzen.

Da die Auflösung der Frequenzdeterminante bei einer größeren Anzahl von Drehmassen äußerst unbequem ist, wird man in diesem Fall auf ein tabellarisches Verfahren zurückgreifen, das eine Erweiterung der Methode von Holzer-Tolle auf die Torsion zweiter Art darstellt. Der Vollständigkeit halber führen wir dieses Verfahren, das bereits von *A. Kimmel* und *M. Läpple*[3] angegeben wurde, kurz an.

Ausgangspunkt ist Gleichung (2). Schreibt man statt k den laufenden Index l und summiert zwischen $l = 1$ und $l = k$, so folgt

$$M_k = -\omega^2 \sum_{l=1}^{k} \Theta_l \varphi_l . \tag{8}$$

[1] Ing.-Arch. 7 (1936) S. 439.
[2] *H. Neuber*, Ing.-Arch. 22 (1954) S. 258.
[3] *A. Kimmel* und *M. Läpple*, Ing.-Arch. 12 (1941) S. 320.

k	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	...	M_{N-3}	M_{N-2}	M_{N-1}
1	$\frac{1}{\Theta_1}+\frac{1}{\Theta_2}-\omega^2\delta_{1,1}$	$\frac{1}{\Theta_2}+\omega^2\delta_{1,2}$	0	0	0	...	0	0	0
2	$\frac{1}{\Theta_2}+\omega^2\delta_{2,1}$	$\frac{1}{\Theta_2}+\frac{1}{\Theta_3}-\omega^2\delta_{2,2}$	$\frac{1}{\Theta_3}+\omega^2\delta_{2,3}$	0	0	...	0	0	0
3	0	$\frac{1}{\Theta_3}+\omega^2\delta_{3,2}$	$\frac{1}{\Theta_3}+\frac{1}{\Theta_4}-\omega^2\delta_{3,3}$	$\frac{1}{\Theta_4}+\omega^2\delta_{3,4}$	0	...	0	0	0
4	0	0	$\frac{1}{\Theta_4}+\omega^2\delta_{4,3}$	$\frac{1}{\Theta_4}+\frac{1}{\Theta_5}-\omega^2\delta_{4,4}$	$\frac{1}{\Theta_5}+\omega^2\delta_{4,5}$	...	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$N-2$	0	0	0	0	0	...	$\frac{1}{\Theta_{N-2}}+\omega^2\delta_{N-2,N-3}$	$\frac{1}{\Theta_{N-2}}+\frac{1}{\Theta_{N-1}}-\omega^2\delta_{N-2,N-2}$	$\frac{1}{\Theta_{N-1}}+\omega^2\delta_{N-2,N-1}$
$N-1$	0	0	0	0	0	...	0	$\frac{1}{\Theta_{N-1}}+\omega^2\delta_{N-1,N-2}$	$\frac{1}{\Theta_{N-1}}+\frac{1}{\Theta_N}-\omega^2\delta_{N-1,N-1}$

$= 0$. (7)

Für $k = N$ ergibt sich hieraus wegen $M_N = 0$ (Randbedingung)

$$\sum_{l=1}^{N} \Theta_l \varphi_l = 0 \,. \tag{9}$$

Man setzt M_k, M_{k-1} und M_{k+1} gemäß (8) in (4) ein, löst die so erhaltene Gleichung nach φ_{k+1} auf und bekommt dann die für das Verfahren grundlegende Formel

$$\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_1} = \frac{(1 + \omega^2 \delta_{k,k-1} \Theta_k) \frac{\varphi_k}{\varphi_1} - \omega^2 (\delta_{k,k-1} + \delta_{k,k} + \delta_{k,k+1}) \sum_{l=1}^{k} \Theta_l \frac{\varphi_l}{\varphi_1}}{1 + \omega^2 \delta_{k,k+1} \Theta_{k+1}} \,. \tag{10}$$

Wegen $M_0 = M_N = 0$ sind hier $\delta_{1,0}$ und $\delta_{N-1,N}$ formal Null zu setzen.

Für eine bekannte Eigenkreisfrequenz ω gestattet (10) die Berechnung sämtlicher Drehwinkelverhältnisse, und die Bedingung (9) ist mit diesen Drehwinkelverhältnissen erfüllt. Dagegen wird bei einer mit einem beliebigen Wert ω (der nicht einer Eigenfrequenz entspricht) durchgeführten Rechnung (9) nicht erfüllt sein, sondern einen bestimmten Restwert R liefern. Berechnet man auf diese Weise für eine größere Zahl von ω-Werten den Ausdruck R und trägt diesen über ω auf, so sind die Abszissen der Nullstellen der Kurve $R = R(\omega)$, da die Bedingung (9) mit diesen erfüllt ist, die richtigen Eigenkreisfrequenzen.

Zur praktischen Durchführung des Verfahrens benutzt man am besten Tabellen nach dem Muster der Tabelle 1. Man nimmt für ω einen Wert an und füllt zunächst die mit Kreuzen ($\times$) bezeichneten Felder aus. Die erste Zeile der Spalte *12* liefert sofort φ_2/φ_1, das dann in Spalte *7* der zweiten Zeile benutzt wird und in Spalte *12* φ_3/φ_1 ergibt, das in der dritten Zeile benötigt wird usw. Schließlich erhält man in der N-ten Zeile der Spalte *7* den dem angenommenen ω-Werte zugehörigen Restwert R und damit einen Punkt im R, ω-Diagramm. Zur Erläuterung wird am Schluß ein Beispiel durchgerechnet.

3. Die homogene Maschine. Die rein homogene Maschine ist dadurch gekennzeichnet, daß sämtliche Drehmassen sowie Einflußzahlen der Haupttorsion und der Nebentorsion untereinander gleich sind, d. h.

$$\Theta_k = \Theta \,; \qquad \delta_{k,k} = \delta \,; \qquad \delta_{k,k-1} = \delta_{k,k+1} = \delta^* \,. \tag{11}$$

Wirkliche Maschinenaggregate bestehen aus einem homogenen Teil und einer oder mehreren zusätzlichen Drehmassen, die von denjenigen im homogenen Teil verschieden sind, ebenso wie die entsprechenden Einflußzahlen. In diesem Fall spricht man von homogenen Maschinen mit Zusatzdrehmassen.

Mit (11) vereinfacht sich die Rekursionsformel (6) zu

$$M_{k-1} - \frac{2 - \omega^2 \delta \Theta}{1 + \omega^2 \delta^* \Theta} M_k + M_{k+1} = 0 \,. \tag{12}$$

Diese Differenzengleichung besitzt die Lösung

$$M_k = C \sin (k x + \gamma) \sin \omega t \tag{13}$$

(C beliebige Konstante), falls man statt ω die Größe x gemäß

$$2 \cos x = \frac{2 - \omega^2 \delta \Theta}{1 + \omega^2 \delta^* \Theta} \tag{14}$$

einführt.

Man kann durch Anschreiben von (6) für $k = 1, 2$ bis $(n - 1)$ feststellen, daß bei der rein homogenen Maschine dafür Gleichung (12) gilt, sofern man $\delta_{1,0} = \delta_{n,n-1} = \delta^*$ setzt, was wegen der Randbedingungen $M_0 = 0$ und $M_n = 0$ ohne weiteres zulässig ist. Infolgedessen gilt (13) bei der rein homogenen Maschine für $k = 0$ bis $k = n$.

Die Auflösung von (14) nach ω liefert

$$\omega = \sqrt{\frac{2 (1 - \cos x)}{\delta \Theta \left(1 + 2 \frac{\delta^*}{\delta} \cos x\right)}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\sqrt{\delta \Theta \left(1 + 2 \frac{\delta^*}{\delta} \cos x\right)}} \,. \tag{15}$$

Der Eigenwert x und die Konstante γ in (13) müssen dabei aus den Randbedingungen bestimmt werden. Den Winkelausschlag φ_k der k-ten Masse erhält man nach kurzer Umformung aus (2), wenn man M_k, M_{k-1} nach (13) sowie ω aus (15) einsetzt:

$$\varphi_k = -C \frac{\delta\left(1 + 2\frac{\delta^*}{\delta}\cos x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} \cos\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)x + \gamma\right] \sin \omega t\,. \tag{16}$$

Um die Konstante C aus (13) und (16) zu entfernen, ist es zweckmäßig, das Momenten- bzw. Drehwinkelverhältnis M_k/M_1 und φ_k/φ_1 zu bilden*:

$$\frac{M_k}{M_1} = \frac{\sin(k\,x + \gamma)}{\sin(x + \gamma)}\,, \tag{17}$$

$$\frac{\varphi_k}{\varphi_1} = \frac{\cos\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)x + \gamma\right]}{\cos\left(\frac{x}{2} + \gamma\right)}\,. \tag{18}$$

Bei der rein homogenen Maschine gelten die Randbedingungen $M_0 = M_n = 0$. Daraus erhält man in Verbindung mit (13)

$$\gamma = 0 \tag{19}$$

und

$$x = \frac{\nu\,\pi}{n} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n - 1)\,. \tag{20}$$

Mit (20) geht (15) über in

$$\omega_\nu = \frac{2\sin\frac{\nu\,\pi}{2\,n}}{\sqrt{\delta\,\Theta\left(1 + 2\frac{\delta^*}{\delta}\cos\frac{\nu\,\pi}{n}\right)}} \qquad (\nu = 1, 2 \ldots n - 1)\,. \tag{21}$$

Aus (17) und (18) erhält man mit (19) und (20) das Momenten- bzw. Drehwinkelverhältnis

$$\left(\frac{M_k}{M_1}\right)_\nu = \frac{\sin\frac{k\,\nu\,\pi}{n}}{\sin\frac{\nu\,\pi}{n}} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2 \ldots n - 1 \\ \nu = 1, 2 \ldots n - 1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\left(\frac{\varphi_k}{\varphi_1}\right)_\nu = \frac{\cos\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\nu\,\pi}{n}\right]}{\cos\frac{\nu\,\pi}{2\,n}} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2 \ldots n \\ \nu = 1, 2 \ldots n - 1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

R. Grammel[1] leitet für die Eigenkreisfrequenzen die Formel

$$\omega_\nu = (\omega_\nu)_{\delta^* = 0}\left(1 + \frac{\delta^*}{\delta}\,q_\nu\right) \tag{24}$$

ab. Hierbei bedeutet $(\omega_\nu)_{\delta^* = 0}$ die Eigenkreisfrequenz bei alleiniger Berücksichtigung der Haupttorsion. Wie *A. Kimmel*[2] zeigt, gilt

$$q_\nu = \frac{\zeta_\nu - 2}{2}\,,$$

wobei der Eigenwert ζ mit unserem Eigenwert x zusammenhängt durch

$$\zeta = 2\,(1 - \cos x)\,.$$

---

* Da die Momente und Drehwinkel wegen der Homogenität des dafür zuständigen linearen Gleichungssystems nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt werden können, geben wir immer die Momenten- bzw. Drehwinkelverhältnisse an.

[1] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik Bd. 2, S. 413.

[2] *A. Kimmel*, Ing.-Arch. 10 (1939) S. 207.

Beachtet man diesen Zusammenhang, entwickelt in (21) den Ausdruck $\left(1 + 2\,\frac{\delta^*}{\delta}\cos\frac{\nu\,\pi}{n}\right)^{-1/2}$ in eine Reihe und bricht diese nach dem zweiten Glied ab, so erhält man vollständige Übereinstimmung mit der auf ganz anderem Weg abgeleiteten Formel (24).

4. Die homogene Maschine mit Zusatzdrehmassen. a) Die homogene Maschine mit einer Zusatzdrehmasse. Die Zahl der Drehmassen im homogenen Teil der Maschine sei* n, die Zusatzdrehmasse sei mit Θ_{n+1} bezeichnet (Abb. 2). Die Einflußzahl der Haupttorsion im hinzukommenden Wellenabschnitt werde mit $\delta_{n,n} = \delta_n$ bezeichnet, die Einflußzahl der entsprechenden Nebentorsion mit $\delta_{n,n-1} = \delta_{n-1,n} = \delta_n^*$.

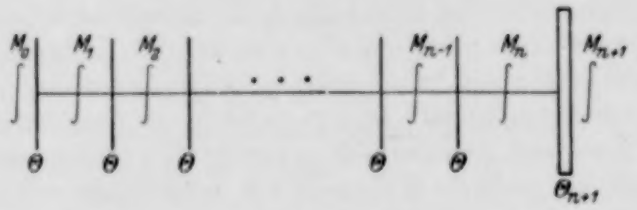


Abb. 2. Homogene Maschine mit einer Zusatzdrehmasse.

Wie man durch Anschreiben von (6) für $k = 1$ bis n feststellen kann, gilt die Rekursionsformel (12) nur für $k = 1$ bis $k = n - 2$, sofern man $\delta_{1,0} = \delta^*$ setzt, was wegen der Randbedingung $M_0 = 0$ erlaubt ist. Die Gleichung (13) ist daher nur für $k = 0$ bis $k = n - 1$ gültig. Gleichung (6) lautet für $k = n - 1$ und $k = n$

$$\left(\frac{1}{\Theta} + \omega^2\,\delta^*\right) M_{n-2} - \left(\frac{2}{\Theta} - \omega^2\,\delta\right) M_{n-1} + \left(\frac{1}{\Theta} + \omega^2\,\delta_n^*\right) M_n = 0\,; \qquad (25)$$

$$\left(\frac{1}{\Theta} + \omega^2\,\delta_n^*\right) M_{n-1} - \left(\frac{1}{\Theta} + \frac{1}{\Theta_{n+1}} - \omega^2\,\delta_n\right) M_n + \left(\frac{1}{\Theta_{n+1}} + \omega^2\,\delta_{n,n+1}\right) M_{n+1} = 0\,. \qquad (26)$$

Aus der Randbedingung $M_0 = 0$ (links freies Ende) folgt mit (13)

$$\gamma = 0\,.$$

Die zweite Randbedingung verlangt $M_{n+1} = 0$ (rechts freies Ende). Berücksichtigt man dieses in (26) und eliminiert M_n in (25) mittels (26), so erhält man, wenn man außerdem ω nach (15) einführt, folgende Beziehung zwischen den Momenten M_{n-2} und M_{n-1}:

$$a_n(x)\,M_{n-2} + (1 - 2\,a_n(x)\cos x)\,M_{n-1} = 0\,. \qquad (27)$$

Dabei bedeutet

$$a_n(x) = \frac{\left(1 + 2\,\frac{\delta^*}{\delta}\right)\left\{1 + \frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} - 2\,\frac{\delta_n}{\delta} + 2\left[\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}\right)\frac{\delta^*}{\delta} + \frac{\delta_n}{\delta}\right]\cos x\right\}}{\left[1 + 2\,\frac{\delta_n^*}{\delta} + 2\left(\frac{\delta^*}{\delta} - \frac{\delta_n^*}{\delta}\right)\cos x\right]^2}\,. \qquad (28)$$

Wir führen nun in (27) M_{n-1} und M_{n-2} nach (13) ein und erhalten nach kurzer Umformung die Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte x in der Form

$$a_n(x)\sin n\,x - \sin(n-1)\,x = 0\,. \qquad (29)$$

Von den Lösungen dieser Gleichung kommen nur Werte $0 < x < \pi$ in Frage. Die Lösungen $x = m\,\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$) sind trivial, da sie keine Winkelausschläge und somit keine Schwingung liefern. Außerhalb des angegebenen Bereiches liegende Eigenwerte führen wegen der Periodizität der Lösungen der Gleichung (29) zu den schon vorher erhaltenen Eigenfrequenzen.

---

* Wir bezeichnen die Zahl sämtlicher Drehmassen einer Maschine immer mit N, während n die Zahl der im homogenen Teil gelegenen Drehmassen bedeutet.

Sind die Eigenwerte x reell, so bekommt man die Eigenkreisfrequenzen sowie die Momente M_1 bis M_{n-1} und die Drehwinkel φ_1 bis φ_{n-1} nach (15), (17) und (18) (für $\gamma = 0$):

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,(1-\cos x)}{\delta\,\Theta\left(1+2\,\frac{\delta^*}{\delta}\cos x\right)}}\,, \tag{30}$$

$$\frac{M_k}{M_1} = \frac{\sin k\,x}{\sin x} \qquad (k = 1, 2 \ldots n-1)\,, \tag{31}$$

$$\frac{\varphi_k}{\varphi_1} = \frac{\cos\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]}{\cos\frac{x}{2}} \qquad (k = 1, 2 \ldots n-1)\,, \tag{32}$$

$$\frac{M_1}{\varphi_1} = -\,\omega^2\,\Theta\,. \tag{33}$$

Die letzte der angeschriebenen Formeln gibt die Beziehung zwischen dem Moment M_1 und dem Drehwinkel φ_1. Das Moment M_n muß aus (25) oder (26) bestimmt werden. Nach (26) ist in Verbindung mit (13)

$$\frac{M_n}{M_1} = \frac{1+\omega^2\,\delta_n^*\,\Theta}{1+\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}-\omega^2\,\delta_n\,\Theta}\,\frac{\sin(n-1)\,x}{\sin x}\,. \tag{34}$$

Die Drehwinkel φ_n und φ_{n+1} bekommt man am einfachsten aus (2) mit $k = n$ und $k = n+1$ bei Beachtung von (33)

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1} = \frac{M_n}{M_1} - \frac{M_{n-1}}{M_1}\,, \tag{35}$$

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_1} = -\,\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}\,\frac{M_n}{M_1}\,. \tag{36}$$

Man kann zeigen, daß der für die höchste Frequenz maßgebende Eigenwert unter Umständen komplex wird[1]. In diesem Fall gilt

$$x = \pi + i\,\beta\,, \tag{37}$$

und die Bestimmungsgleichung für β lautet

$$a_n'(\beta)\,\mathfrak{Sin}\,n\,\beta + \mathfrak{Sin}\,(n-1)\,\beta = 0\,, \tag{29'}$$

wobei

$$a_n'(\beta) = \frac{\left(1+2\,\frac{\delta^*}{\delta}\right)\cdot\left\{1+\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}-2\,\frac{\delta_n}{\delta}-2\left[\left(1+\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}\right)\frac{\delta^*}{\delta}+\frac{\delta_n}{\delta}\right]\mathfrak{Cof}\,\beta\right\}}{\left[1+2\,\frac{\delta_n^*}{\delta}-2\left(\frac{\delta^*}{\delta}-\frac{\delta_n^*}{\delta}\right)\mathfrak{Cof}\,\beta\right]^2}\,. \tag{28'}$$

Die Formeln (30), (31), (32) und (34) gehen dann über in

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,(1+\mathfrak{Cof}\,\beta)}{\delta\,\Theta\left(1-2\,\frac{\delta^*}{\delta}\,\mathfrak{Cof}\,\beta\right)}}\,, \tag{30'}$$

$$\frac{M_k}{M_1} = (-1)^{k+1}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,k\,\beta}{\mathfrak{Sin}\,\beta} \qquad (k = 1, 2 \ldots n-1)\,, \tag{31'}$$

$$\frac{\varphi_k}{\varphi_1} = (-1)^{k+1}\,\frac{\mathfrak{Sin}\left(k-\frac{1}{2}\right)\beta}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\beta}{2}} \qquad (k = 1, 2 \ldots n-1)\,, \tag{32'}$$

$$\frac{M_n}{M_1} = (-1)^{n+1}\,\frac{1+\omega^2\,\delta_n^*\,\Theta}{1+\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}-\omega^2\,\delta_n\,\Theta}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,(n-1)\,\beta}{\mathfrak{Sin}\,\beta}\,, \tag{34'}$$

während die Formeln (35) und (36) erhalten bleiben.

[1] Vgl. *H. Bufler* und *F. Kießling*, Ing.-Arch. 29 (1960) S. 250.

Aus der Formel (30′) erkennt man, daß die Eigenfrequenz imaginär wird, falls

$$\mathfrak{Cof}\,\beta > \frac{\delta}{2\,\delta^*}\,. \tag{38}$$

Das bedeutet, daß dann eine Frequenz weniger auftritt als bei der Torsion erster Art, bei der es bekanntlich für insgesamt N Drehmassen $N-1$ Eigenfrequenzen gibt.

b) Die homogene Maschine mit zwei Zusatzdrehmassen auf einer Seite. Wir legen für den homogenen Teil der Maschine wieder n Drehmassen zugrunde; die Zusatzdrehmassen seien Θ_{n+1} und Θ_{n+2} (Abb. 3). Die Einflußzahlen der Haupttorsionen in den beiden hinzukommenden Wellenabschnitten sind $\delta_{n,n} = \delta_n$ und $\delta_{n+1,n+1} = \delta_{n+1}$, die Einflußzahlen der entsprechenden Nebentorsionen $\delta_{n,n-1} = \delta_{n-1,n} = \delta_n^*$ und $\delta_{n+1,n} = \delta_{n,n+1} = \delta_{n+1}^*$.

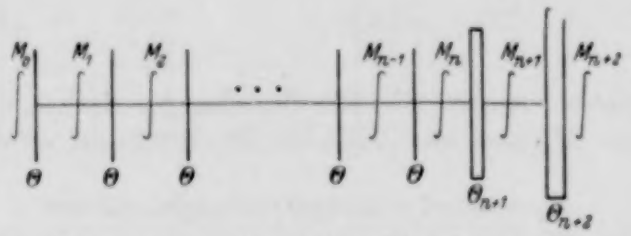


Abb. 3. Homogene Maschine mit zwei Zusatzdrehmassen auf einer Seite.

Schreibt man (6) für $k = 1$ bis $k = n+1$ an, so sieht man, daß die Differenzengleichung (12) nur für $k = 1$ bis $k = n-2$ Gültigkeit hat, falls man $\delta_{1,0} = \delta^*$ setzt, was wegen der Randbedingung $M_0 = 0$ zulässig ist. Gleichung (13) ist daher nur für die Momente M_0 bis M_{n-1} zuständig. Für $k = n-1$, $k = n$, $k = n+1$ geht (6) über in

$$\left(\frac{1}{\Theta} + \omega^2\,\delta^*\right) M_{n-2} - \left(\frac{2}{\Theta} - \omega^2\,\delta\right) M_{n-1} + \left(\frac{1}{\Theta} + \omega^2\,\delta_n^*\right) M_n = 0\,, \tag{39}$$

$$\left(\frac{1}{\Theta} + \omega^2\,\delta_n^*\right) M_{n-1} - \left(\frac{1}{\Theta} + \frac{1}{\Theta_{n+1}} - \omega^2\,\delta_n\right) M_n + \left(\frac{1}{\Theta_{n+1}} + \omega^2\,\delta_{n+1}^*\right) M_{n+1} = 0\,, \tag{40}$$

$$\left(\frac{1}{\Theta_{n+1}} + \omega^2\,\delta_{n+1}^*\right) M_n - \left(\frac{1}{\Theta_{n+1}} + \frac{1}{\Theta_{n+2}} - \omega^2\,\delta_{n+1}\right) M_{n+1} + \left(\frac{1}{\Theta_{n+2}} + \omega^2\,\delta_{n+1,n+2}\right) M_{n+2} = 0\,. \tag{41}$$

Die Randbedingung am linken Ende $M_0 = 0$ ergibt mit (13)

$$\gamma = 0\,.$$

Die Randbedingung am rechten Ende lautet

$$M_{n+2} = 0\,.$$

Damit bekommt man aus (39), (40) und (41) nach Elimination von M_{n+1} und M_n sowie Einführung von ω nach (15) folgende Gleichung zwischen den Momenten M_{n-1} und M_{n-2}:

$$\left[\left(\frac{1 + 2\,\frac{\delta^*}{\delta}}{1 + 2\,\frac{\delta_n^*}{\delta} + 2\left(\frac{\delta^*}{\delta} - \frac{\delta_n^*}{\delta}\right)\cos x}\right)^2 - a_n(x)\,a_{n+1}(x)\right] \cdot M_{n-2}$$

$$- \left\{a_{n+1}(x) + 2\left[\left(\frac{1 + 2\,\frac{\delta^*}{\delta}}{1 + 2\,\frac{\delta_n^*}{\delta} + 2\left(\frac{\delta^*}{\delta} - \frac{\delta_n^*}{\delta}\right)\cos x}\right)^2 - a_n(x)\,a_{n+1}(x)\right]\cos x\right\} M_{n-1} = 0\,. \tag{42}$$

Hierbei bedeutet $a_n(x)$ die Abkürzung (28), und es ist ferner

$$a_{n+1}(x) = \frac{\left(1 + 2\,\frac{\delta^*}{\delta}\right)\left\{\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} + \frac{\Theta}{\Theta_{n+2}} - 2\,\frac{\delta_{n+1}}{\delta} + 2\left[\left(\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} + \frac{\Theta}{\Theta_{n+2}}\right)\frac{\delta^*}{\delta} + \frac{\delta_{n+1}}{\delta}\right]\cos x\right\}}{\left[\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} + 2\,\frac{\delta_{n+1}^*}{\delta} + 2\left(\frac{\delta^*\,\Theta}{\delta\,\Theta_{n+1}} - \frac{\delta_{n+1}^*}{\delta}\right)\cos x\right]^2}\,. \tag{43}$$

In (42) führen wir wieder M_{n-1} und M_{n-2} nach (13) ein und erhalten dann nach geeigneter Zusammenfassung die gesuchte Bestimmungsgleichung[1] für die Eigenwerte x:

$$\left[\left(\frac{1+2\frac{\delta^*}{\delta}}{1+2\frac{\delta_n^*}{\delta}+2\left(\frac{\delta^*}{\delta}-\frac{\delta_n^*}{\delta}\right)\cos x}\right)^2 - a_n(x)\,a_{n+1}(x)\right]\sin n\,x + a_{n+1}(x)\sin(n-1)\,x = 0\,. \tag{44}$$

Für reelle Eigenwerte x sind wegen $\gamma = 0$ die Eigenkreisfrequenzen sowie die Momente M_1 bis M_{n-1} und die Drehwinkel φ_1 bis φ_{n-1} aus den Formeln (30), (31) und (32) zu entnehmen. Die Momente M_n und M_{n+1} sind aus (39) und (40) oder (41) zu berechnen. Wir erhalten in Verbindung mit (13) aus (39)

$$\frac{M_n}{M_1} = \frac{2-\omega^2\,\delta\,\Theta}{1+\omega^2\,\delta_n^*\,\Theta}\,\frac{\sin(n-1)\,x}{\sin x} - \frac{1+\omega^2\,\delta^*\,\Theta}{1+\omega^2\,\delta_n^*\,\Theta}\,\frac{\sin(n-2)\,x}{\sin x} \tag{45}$$

und aus (40)

$$\frac{M_{n+1}}{M_1} = \frac{1+\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}-\omega^2\,\delta_n\,\Theta}{\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\omega^2\,\delta_{n+1}^*\,\Theta}\,\frac{M_n}{M_1} - \frac{1+\omega^2\,\delta_n^*\,\Theta}{\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\omega^2\,\delta_{n+1}^*\,\Theta}\,\frac{\sin(n-1)\,x}{\sin x}\,. \tag{46}$$

Gleichung (2), angeschrieben für $k = n$, $k = n+1$ und $k = n+2$, liefert unter Berücksichtigung von (33) die Drehwinkel φ_n, φ_{n+1} und φ_{n+2}:

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_1} = \frac{M_n}{M_1} - \frac{M_{n-1}}{M_1}\,, \tag{47}$$

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_1} = \frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}\left(\frac{M_{n+1}}{M_1} - \frac{M_n}{M_1}\right), \tag{48}$$

$$\frac{\varphi_{n+2}}{\varphi_1} = -\frac{\Theta}{\Theta_{n+2}}\,\frac{M_{n+1}}{M_1}\,. \tag{49}$$

Es ist nun möglich, daß für gewisse Daten der zur höchsten Frequenz gehörige Eigenwert x oder die beiden zu den höchsten Frequenzen gehörigen Eigenwerte x komplex werden[2]. In diesem Fall gilt (37), wobei β aus folgender Gleichung bestimmt werden muß:

$$\left[\left(\frac{1+2\frac{\delta^*}{\delta}}{1+2\frac{\delta_n^*}{\delta}-2\left(\frac{\delta^*}{\delta}-\frac{\delta_n^*}{\delta}\right)\mathfrak{Cof}\,\beta}\right)^2 - a_n'(\beta)\,a_{n+1}'(\beta)\right]\mathfrak{Sin}\,n\beta - a_{n+1}'(\beta)\,\mathfrak{Sin}\,(n-1)\,\beta = 0\,. \tag{44'}$$

Hierin hat $a_n'(\beta)$ die Bedeutung (28′), und es ist weiterhin

$$a_{n+1}'(\beta) = \frac{\left(1+2\frac{\delta^*}{\delta}\right)\left[\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+2}}-2\dfrac{\delta_{n+1}}{\delta}-2\left[\left(\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+2}}\right)\dfrac{\delta^*}{\delta}+\dfrac{\delta_{n+1}}{\delta}\right]\mathfrak{Cof}\,\beta\right]}{\left[\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+2\dfrac{\delta_{n+1}^*}{\delta}-2\left(\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}\dfrac{\delta^*}{\delta}-\dfrac{\delta_{n+1}^*}{\delta}\right)\mathfrak{Cof}\,\beta\right]^2}\,. \tag{43'}$$

Für die Eigenfrequenzen sowie die Momente M_1 bis M_{n-1} und die Drehwinkel φ_1 bis φ_{n-1} gelten die Formeln (30′), (31′) und (32′). Setzt man in (45) und (46) $x = \pi + i\,\beta$, so erhält man für die Momente M_n und M_{n+1}

$$\frac{M_n}{M_1} = (-1)^n\left[\frac{2-\omega^2\,\delta\,\Theta}{1+\omega^2\,\delta_n^*\,\Theta}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,(n-1)\,\beta}{\mathfrak{Sin}\,\beta} + \frac{1+\omega^2\,\delta^*\,\Theta}{1+\omega^2\,\delta_n^*\,\Theta}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,(n-2)\,\beta}{\mathfrak{Sin}\,\beta}\right], \tag{45'}$$

$$\frac{M_{n+1}}{M_1} = \frac{1+\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}-\omega^2\,\delta_n\,\Theta}{\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\omega^2\,\delta_{n+1}^*\,\Theta}\,\frac{M_n}{M_1} - (-1)^n\,\frac{1+\omega^2\,\delta_n^*\,\Theta}{\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\omega^2\,\delta_{n+1}^*\,\Theta}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,(n-1)\,\beta}{\mathfrak{Sin}\,\beta}\,. \tag{46'}$$

Die Drehwinkel φ_n, φ_{n+1} und φ_{n+2} sind aus (47), (48) und (49) zu berechnen.

Ist die Bedingung (38) für einen oder zwei Eigenwerte erfüllt, so bedeutet das, daß eine bzw. zwei Frequenzen weniger auftreten, als es die Torsion erster Art verlangen würde.

---

[1] Sinngemäß gilt auch hier die im Anschluß an (29) gemachte Bemerkung.

[2] Siehe Fußnote 1 von Seite 379.

c) Die homogene Maschine mit je einer Zusatzdrehmasse auf beiden Seiten. Der homogene Teil der Maschine umfasse wieder n Massen; die polaren Massenträgheitsmomente der linken bzw. rechten Zusatzdrehmasse seien Θ_0 bzw. Θ_{n+1} (s. Abb. 4). Die Einflußzahlen der Haupttorsionen in den beiden hinzukommenden Wellenabschnitten sind $\delta_{0,0} = \delta_0$ und $\delta_{n,n} = \delta_n$, die Einflußzahlen der entsprechenden Nebentorsionen $\delta_{1,0} = \delta_{0,1} = \delta_0^*$ und $\delta_{n,n-1} = \delta_{n-1,n} = \delta_n^*$.

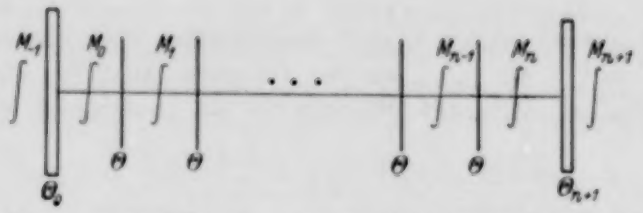


Abb. 4. Homogene Maschine mit je einer Zusatzdrehmasse auf beiden Seiten.

Aus (6), angeschrieben für $k = 0$ bis $k = n$, erkennt man, daß (12) nur für $k = 2$ bis $k = n - 2$ gilt. Infolgedessen erhält man die Momente M_1 bis M_{n-1} aus (13). Mit $k = 0$, $k = 1$ bzw. $k = n - 1$, $k = n$ folgen aus (6) die beiden Gleichungspaare:

Linkes Ende:

$$\left(\frac{1}{\Theta_0} + \omega^2 \delta_{0,-1}\right) M_{-1} - \left(\frac{1}{\Theta_0} + \frac{1}{\Theta} - \omega^2 \delta_0\right) M_0 + \left(\frac{1}{\Theta} + \omega^2 \delta_0^*\right) M_1 = 0\,, \tag{50}$$

$$\left(\frac{1}{\Theta} + \omega^2 \delta_0^*\right) M_0 - \left(\frac{2}{\Theta} - \omega^2 \delta\right) M_1 + \left(\frac{1}{\Theta} + \omega^2 \delta^*\right) M_2 = 0\,, \tag{51}$$

Rechtes Ende:

$$\left(\frac{1}{\Theta} + \omega^2 \delta^*\right) M_{n-2} - \left(\frac{2}{\Theta} - \omega^2 \delta\right) M_{n-1} + \left(\frac{1}{\Theta} + \omega^2 \delta_n^*\right) M_n = 0\,, \tag{52}$$

$$\left(\frac{1}{\Theta} + \omega^2 \delta_n^*\right) M_{n-1} - \left(\frac{1}{\Theta} + \frac{1}{\Theta_{n+1}} - \omega^2 \delta_n\right) M_n + \left(\frac{1}{\Theta} + \omega^2 \delta_{n,n+1}\right) M_{n+1} = 0\,. \tag{53}$$

Die Randbedingungen lauten hier

$$M_{-1} = 0 \quad \text{und} \quad M_{n+1} = 0\,.$$

Berücksichtigt man diese in (50) und (53) und eliminiert M_0 aus (50) und (51) sowie M_n aus (52) und (53), so bekommt man, wenn man außerdem noch ω nach (15) einführt,

$$[1 - 2\, a_0(x) \cos x]\, M_1 + a_0(x)\, M_2 = 0\,, \tag{54}$$

$$a_n(x)\, M_{n-2} + [1 - 2\, a_n(x) \cos x]\, M_{n-1} = 0\,, \tag{55}$$

wobei $a_n(x)$ die Abkürzung (28) und

$$a_0(x) = \frac{\left(1 + 2\,\frac{\delta_0^*}{\delta}\right)\left\{1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} - 2\,\frac{\delta_0}{\delta} + 2\left[\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0}\right)\frac{\delta^*}{\delta} + \frac{\delta_0}{\delta}\right]\cos x\right\}}{\left[1 + 2\,\frac{\delta_0^*}{\delta} + 2\left(\frac{\delta^*}{\delta} - \frac{\delta_0^*}{\delta}\right)\cos x\right]^2} \tag{56}$$

bedeutet. In (54) und (55) setzen wir für die Momente M_1, M_2, M_{n-2} und M_{n-1} die Ausdrücke (13) ein; sodann folgt, wenn man nach $\sin\gamma$ und $\cos\gamma$ ordnet,

$$\{a_0(x) \cos 2x + [1 - 2\, a_0(x) \cos x] \cos x\} \sin\gamma + \{a_0(x) \sin 2x + [1 - 2\, a_0(x) \cos x] \sin x\} \cos\gamma = 0\,, \tag{57}$$

$$\{a_n(x) \cos (n-2)x + [1 - 2\, a_n(x) \cos x] \cos (n-1)x\} \sin\gamma + \{a_n(x) \sin (n-2)x + [1 - 2\, a_n(x) \cos x] \sin (n-1)x\} \cos\gamma = 0\,. \tag{58}$$

Die Determinante der Koeffizienten von $\sin\gamma$ und $\cos\gamma$ muß verschwinden, woraus sich nach geeigneter Zusammenfassung folgende Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte x ergibt*:

$$a_0(x)\, a_n(x) \sin n x - [a_0(x) + a_n(x)] \sin (n-1)x + \sin (n-2)x = 0\,. \tag{59}$$

* Sinngemäß gilt auch hier die im Anschluß an (29) gemachte Bemerkung.

Für reelle Eigenwerte x müssen die Eigenkreisfrequenz sowie die Momente M_1 bis M_{n-1} und die Drehwinkel φ_2 bis φ_{n-1} den Formeln

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,(1-\cos x)}{\delta\,\Theta\left(1+2\,\frac{\delta^*}{\delta}\cos x\right)}}\,, \tag{60}$$

$$\frac{M_k}{M_1} = \frac{\sin k\,x\,\operatorname{ctg}\gamma + \cos k\,x}{\sin x\,\operatorname{ctg}\gamma + \cos x}\,, \qquad (k = 1, 2 \ldots n-1)\,, \tag{61}$$

$$\frac{\varphi_k}{\varphi_2} = \frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x\,\operatorname{ctg}\gamma - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{\cos\frac{3}{2}\,x\,\operatorname{ctg}\gamma - \sin\frac{3}{2}\,x} \qquad (k = 2, 3 \ldots n-1)\,, \tag{62}$$

die sofort aus (15), (17) und (16) folgen, entnommen werden.

Im Gegensatz zu früher haben wir in (62) den Bezugswinkel φ_2 eingeführt, da hier für φ_1 Gleichung (16) nicht mehr zuständig ist, wie man aus (2) mit $k = 1$ erkennen kann. Für die weitere Rechnung benötigen wir noch das Verhältnis

$$\frac{M_1}{\varphi_2} = -\,\frac{\omega^2\,\Theta}{2\sin\frac{x}{2}}\,\frac{\sin x\,\operatorname{ctg}\gamma + \cos x}{\cos\frac{3}{2}\,x\,\operatorname{ctg}\gamma - \sin\frac{3}{2}\,x}\,. \tag{63}$$

Der Ausdruck $\operatorname{ctg}\gamma$ kann entweder aus (57) oder (58) entnommen werden; nach (57) ist

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\gamma &= -\,\frac{a_0(x)\cos 2\,x + [1-2\,a_0(x)\cos x]\cos x}{a_0(x)\sin 2\,x + [1-2\,a_0(x)\cos x]\sin x}\\ &= \frac{\left(1+2\,\frac{\delta^*}{\delta}\right)\left\{1+\frac{\Theta}{\Theta_0}-2\,\frac{\delta_0}{\delta}+2\left[\left(1+\frac{\Theta}{\Theta_0}\right)\frac{\delta^*}{\delta}+\frac{\delta_0}{\delta}\right]\cos x\right\}}{\left[1+2\,\frac{\delta_0^*}{\delta}+2\left(\frac{\delta^*}{\delta}-\frac{\delta_0^*}{\delta}\right)\cos x\right]^2\sin x} - \operatorname{ctg} x\,.\end{aligned} \tag{64}$$

Die Momente M_0 und M_n berechnet man zweckmäßig aus (50) und (53):

$$\frac{M_0}{M_1} = \frac{1+\omega^2\,\delta_0^*\,\Theta}{1+\frac{\Theta}{\Theta_0}-\omega^2\,\delta_0\Theta}\,, \tag{65}$$

$$\frac{M_n}{M_1} = \frac{1+\omega^2\,\delta_n^*\,\Theta}{1+\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}-\omega^2\,\delta_n\,\Theta}\,\frac{\sin(n-1)\,x\,\operatorname{ctg}\gamma + \cos(n-1)\,x}{\sin x\,\operatorname{ctg}\gamma + \cos x}\,. \tag{66}$$

Die Drehwinkel $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_n, \varphi_{n+1}$ folgen aus (2) mit $k = 0, 1, n, n-1$ bei Berücksichtigung von (63):

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_2} = b(x)\,\frac{\Theta}{\Theta_0}\,\frac{M_0}{M_1}\,, \tag{67}$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = b(x)\left(1-\frac{M_0}{M_1}\right), \tag{68}$$

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_2} = b(x)\left(\frac{M_n}{M_1}-\frac{M_{n-1}}{M_1}\right), \tag{69}$$

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_2} = -\,b(x)\,\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}\,\frac{M_n}{M_1}\,, \tag{70}$$

wobei wir zur Abkürzung

$$b(x) = \frac{\sin x\,\operatorname{ctg}\gamma + \cos x}{2\left(\cos\frac{3}{2}\,x\,\operatorname{ctg}\gamma - \sin\frac{3}{2}\,x\right)\sin\frac{x}{2}} \tag{71}$$

einführen.

Man kann zeigen, daß für gewisse Daten der zur höchsten Frequenz gehörige Eigenwert x oder die beiden zu den höchsten Frequenzen gehörigen Eigenwerte x komplex werden[1]. Dann gilt (37), und β ist aus folgender Gleichung zu ermitteln:

$$a_0'(\beta)\,a_n'(\beta)\,\mathfrak{Sin}\,n\,\beta + [a_0'(\beta) + a_n'(\beta)]\,\mathfrak{Sin}\,(n-1)\,\beta + \mathfrak{Sin}\,(n-2)\,\beta = 0\,. \tag{59'}$$

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 379.

Aus (28′) ist $a_n'(\beta)$ zu entnehmen, und $a_0'(\beta)$ ist gegeben durch

$$a_0'(\beta) = \frac{\left(1+2\frac{\delta^*}{\delta}\right)\left\{1+\frac{\Theta}{\Theta_0}-2\frac{\delta_0}{\delta}-2\left[\left(1+\frac{\Theta}{\Theta_0}\right)\frac{\delta^*}{\delta}+\frac{\delta_0}{\delta}\right]\mathfrak{Cof}\,\beta\right\}}{\left[1+2\frac{\delta_0^*}{\delta}-2\left(\frac{\delta^*}{\delta}-\frac{\delta_0^*}{\delta}\right)\mathfrak{Cof}\,\beta\right]^2}. \tag{56′}$$

Für die Eigenfrequenzen sowie die Momente M_1 bis M_{n-1} und die Drehwinkel φ_2 bis φ_{n-1} gelten hier die Formeln

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,(1+\mathfrak{Cof}\,\beta)}{\delta\,\Theta\left(1-2\frac{\delta^*}{\delta}\,\mathfrak{Cof}\,\beta\right)}}, \tag{60′}$$

$$\frac{M_k}{M_1} = (-1)^{k+1}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,k\,\beta\,\mathfrak{Ctg}\,\bar{\gamma}-\mathfrak{Cof}\,k\,\beta}{\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Ctg}\,\bar{\gamma}-\mathfrak{Cof}\,\beta} \qquad (k=1,2\ldots n-1), \tag{61′}$$

$$\frac{\varphi_k}{\varphi_2} = (-1)^k\,\frac{\mathfrak{Sin}\left(k-\frac{1}{2}\right)\beta\,\mathfrak{Ctg}\,\bar{\gamma}-\mathfrak{Cof}\left(k-\frac{1}{2}\right)\beta}{\mathfrak{Sin}\,\frac{3}{2}\,\beta\,\mathfrak{Ctg}\,\bar{\gamma}-\mathfrak{Cof}\,\frac{3}{2}\,\beta} \qquad (k=2,3\ldots n-1). \tag{62′}$$

Der Wert $\mathfrak{Ctg}\,\bar{\gamma}$ ist dabei gegeben durch

$$\mathfrak{Ctg}\,\bar{\gamma} = \frac{\left(1+2\frac{\delta^*}{\delta}\right)\left\{1+\frac{\Theta}{\Theta_0}-2\frac{\delta_0}{\delta}-2\left[\left(1+\frac{\Theta}{\Theta_0}\right)\frac{\delta^*}{\delta}+\frac{\delta_0}{\delta}\right]\mathfrak{Cof}\,\beta\right\}}{\left[1+2\frac{\delta_0^*}{\delta}-2\left(\frac{\delta^*}{\delta}-\frac{\delta_0^*}{\delta}\right)\mathfrak{Cof}\,\beta\right]^2\mathfrak{Sin}\,\beta}+\mathfrak{Ctg}\,\beta. \tag{64′}$$

Das Moment M_0 ist durch (65) bestimmt, für M_n ergibt sich

$$\frac{M_n}{M_1} = (-1)^n\,\frac{(1+\omega^2\,\delta_n^*)\,[\mathfrak{Sin}\,(n-1)\,\beta\,\mathfrak{Ctg}\,\bar{\gamma}-\mathfrak{Cof}\,(n-1)\,\beta]}{\left(1+\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}-\omega^2\,\delta_n\,\Theta\right)(\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Ctg}\,\bar{\gamma}-\mathfrak{Cof}\,\beta)}. \tag{66′}$$

Schließlich erhalten wir für die Drehwinkel

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_2} = b'(\beta)\,\frac{\Theta}{\Theta_0}\,\frac{M_0}{M_1}, \tag{67′}$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = b'(\beta)\left(1-\frac{M_0}{M_1}\right), \tag{68′}$$

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_2} = b'(\beta)\left(\frac{M_n}{M_1}-\frac{M_{n-1}}{M_1}\right), \tag{69′}$$

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_2} = -\,b'(\beta)\,\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}\,\frac{M_n}{M_1}, \tag{70′}$$

wobei

$$b'(\beta) = -\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\beta\,\mathfrak{Ctg}\,\bar{\gamma}-\mathfrak{Cof}\,\beta}{2\left(\mathfrak{Sin}\,\frac{3}{2}\,\beta\,\mathfrak{Ctg}\,\bar{\gamma}-\mathfrak{Cof}\,\frac{3}{2}\,\beta\right)\mathfrak{Cof}\,\frac{\beta}{2}} \tag{71′}$$

ist.

Falls die Bedingung (38) für einen oder zwei Eigenwerte zutrifft, so gibt es eine bzw. zwei Eigenfrequenzen weniger als bei alleiniger Berücksichtigung der Torsion erster Art.

5. Beispiel. Als Beispiel betrachten wir einen Vierzylindermotor mit Schwungrad (Abb. 5). Die für die einzelnen Kolben maßgebenden Trägheitsmomente seien $\Theta_1=\Theta_2=\Theta_3=\Theta_4=\Theta$, die Einflußzahlen der Haupttorsion zwischen den Zylindern $\delta_{1,1}=\delta_{2,2}=\delta_{3,3}=\delta$ und die entsprechenden Einflußzahlen der (primären) Nebentorsion $\delta_{1,2}=\delta_{2,3}=\delta^*=0{,}15\,\delta$. Das Schwungrad besitze das Massenträgheitsmoment $\Theta_5=10\,\Theta$, das Kurbelwellenstück zwischen Schwungrad und viertem Zylinder habe die Einflußzahl der Haupttorsion $\delta_{4,4}=\delta_4=\frac{1}{3}\,\delta$; die Einflußzahl der (primären) Nebentorsion $\delta_{3,4}=\delta_4^*$ sei $\delta_4^*=0{,}10\,\delta$.

Tabelle 1. *Schema zur Ermittlung eines Restwertes R*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
k	$\delta_{k,k-1}$	$\delta_{k,k}$	$\delta_{k,k+1}$	$\delta_{k,k-1}+\delta_{k,k}+\delta_{k,k+1}$	Θ_k	Θ_{k+1}	$\sum_{l=1}^{k}\frac{\varphi_l}{\varphi_1}\Theta_l$	$\omega^2\cdot 4\cdot 7$	$1+\omega^2\cdot 1\cdot 5$	$1+\omega^2\cdot 3\cdot 6$	$9\cdot\frac{\varphi_k}{\varphi_1}-8$	$\frac{11}{10}=\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_1}$	$\frac{\varphi_k}{\varphi_1}$
1	0	×	×	×	×	×	×	×	1	×	×	...	1
2	×	×	×	×	×	×	...	...	...	...	...	...	...
3	×	×	×	×	×	×	...	...	...	...	...	...	...
⋮	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$N-1$	×	×	0	×	×	×	...	...	...	...	...	...	...
N	—	—	—	—	×	—	$R=R(\omega)$	—	—	—	—	—	...

Tabelle 2. *Eigenfrequenzen, Momenten- und Drehwinkelverhältnisse für das betrachtete Beispiel (f_ν Eigenfrequenz in Hz)*

ν	$\omega_\nu\sqrt{\delta\Theta}$	$f_\nu\sqrt{\delta\Theta}$	M_2/M_1	M_3/M_1	M_4/M_1	φ_2/φ_1	φ_3/φ_1	φ_4/φ_1	φ_5/φ_1
1	0,414	0,0659	1,782	2,177	2,122	0,782	0,395	—0,055	—0,2122
2	1,127	0,1794	0,613	—0,624	—1,052	—0,387	—1,237	—0,428	0,1052
3	1,872	0,2979	—0,994	—0,039	1,182	—1,994	0,955	1,221	—0,1182
4	2,455	0,3907	—2,110	3,470	—6,06	—3,11	5,58	—9,53	0,606

Tabelle 3. *Durchrechnung der Tabelle 1 mit den Daten des betrachteten Beispiels und $\omega \doteq \omega_2 = 1{,}127$, wobei $\delta = 1$ und $\Theta = 1$ gesetzt wurde*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
k	$\delta_{k,k-1}$	$\delta_{k,k}$	$\delta_{k,k+1}$	$\delta_{k,k-1}+\delta_{k,k}+\delta_{k,k+1}$	Θ_k	Θ_{k+1}	$\sum_{l=1}^{k}\frac{\varphi_l}{\varphi_1}\Theta_l$	$\omega^2\cdot 4\cdot 7$	$1+\omega^2\cdot 1\cdot 5$	$1+\omega^2\cdot 3\cdot 6$	$9\cdot\frac{\varphi_k}{\varphi_1}-8$	$\frac{11}{10}=\frac{\varphi_{k+1}}{\varphi_1}$	$\frac{\varphi_k}{\varphi_1}$
1	0	1,000	0,15	1,150	1	1	1,000	1,460	1,0000	1,1905	—0,460	—0,387	1,000
2	0,15	1,000	0,15	1,300	1	1	0,613	1,012	1,1905	1,1905	—1,472	—1,237	—0,387
3	0,15	1,000	0,10	1,250	1	1	—0,624	—0,987	1,1905	1,1270	—0,484	—0,428	—1,237
4	0,10	0,333	0	0,433	1	10	—1,052	—0,574	1,1270	1,0000	0,1052	0,1052	—0,428
5	—	—	—	—	10	—	0,000	—	—	—	—	—	0,1052

Mit den angegebenen Daten erhält man aus (29) mit (28) folgende Gleichung für die Eigenwerte x:

$$f(x) \equiv \frac{0{,}564 + 1{,}295 \cos x}{(1{,}2 + 0{,}1 \cos x)^2} \sin 4x - \sin 3x = 0 . \qquad (1^*)$$

Die graphische Lösung dieser Gleichung zeigt Abb. 6 und liefert in dem in Betracht kommenden Bereich $0 < x < \pi$ die drei Eigenwerte

$$x_1 = 0{,}472 , \quad x_2 = 1{,}261 , \quad x_3 = 2{,}083 .$$

Abb. 5. Vierzylindermotor mit Schwungrad.

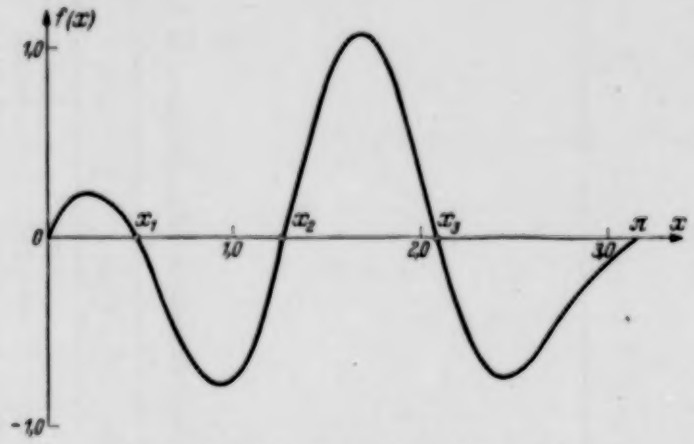


Abb. 6. Graphische Lösung der Gleichung (1*).

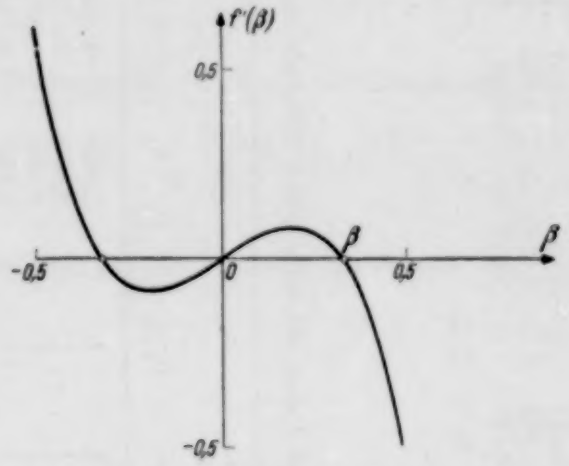


Abb. 7. Graphische Lösung der Gleichung (2*).

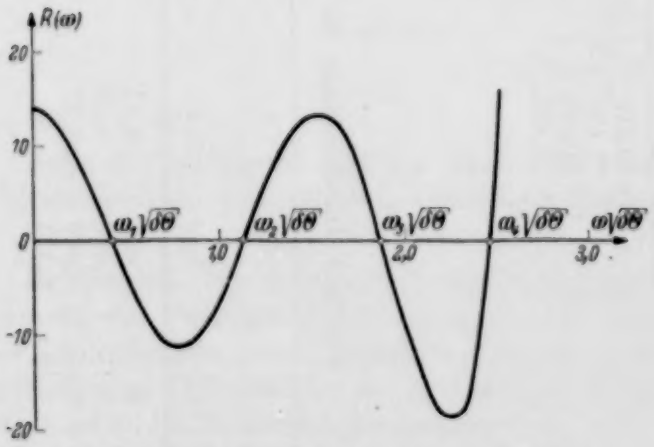


Abb. 9. Restwertkurve für das betrachtete Beispiel.

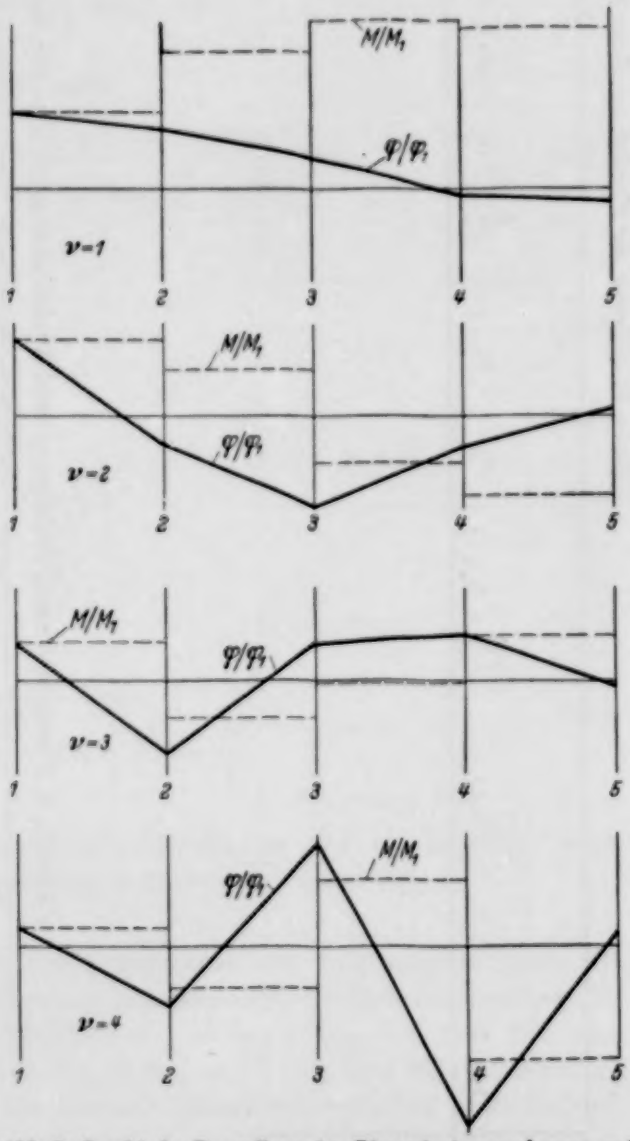


Abb. 8. Graphische Darstellung der Eigenschwingungsformen und der in den einzelnen Wellenabschnitten auftretenden Momente für $\nu = 1$ (Grundfrequenz) bis $\nu = 4$ (höchste Frequenz).

Der vierte Eigenwert muß aus (29′) mit (28′) errechnet werden:

$$f'(\beta) \equiv \frac{0{,}564 - 1{,}295\,\mathfrak{Cof}\,\beta}{(1{,}2 - 0{,}1\,\mathfrak{Cof}\,\beta)^2}\,\mathfrak{Sin}\,4\beta + \mathfrak{Sin}\,3\beta = 0\,. \qquad (2^*)$$

Die Kurve $f' = f'(\beta)$ ist in Abb. 7 dargestellt; man erhält daraus

$$\beta = 0{,}328\,.$$

Nach Einsetzen der so gefundenen Eigenwerte in (30) bzw. (30′) ergeben sich die in Tabelle 2 eingetragenen Eigenkreisfrequenzen. Die Momenten- und Drehwinkelverhältnisse folgen alsdann aus den Gleichungen (31), (32), (34) bzw. (31′), (32′), (34′) sowie (35) und (36). Sie sind in Tabelle 2 zusammengestellt und in Abb. 8 graphisch aufgetragen.

Zum Vergleich lösen wir die vorliegende Aufgabe noch nach dem erwähnten Tabellenverfahren. Zu diesem Zweck errechnen wir für eine Reihe von ω-Werten den Restwert R (In Tabelle 3 ist die zahlenmäßige Rechnung für $\omega = \omega_2$ durchgeführt); die sich ergebende Kurve $R = R(\omega)$ zeigt Abb. 9. Aus den Schnittpunkten mit der Abszisse folgen sofort die vier Eigenkreisfrequenzen ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, welche mit jenen in Tabelle 2 angegebenen übereinstimmen. Mit diesen Werten liefert Spalte *7* der Tabelle 1 die in den einzelnen Wellenabschnitten übertragenen Momente und Spalte *12* die Drehwinkelverhältnisse.

6. Zusammenfassung. Einer genauen Drehschwingungsberechnung von Kolbenmaschinen ist die Torsion zweiter Art zugrunde zu legen. Für je drei aufeinanderfolgende Drehmomente läßt sich eine Rekursionsformel angeben, welche sich von derjenigen bei der Torsion erster Art dadurch unterscheidet, daß alle drei Koeffizienten der Momente ein mit der Eigenkreisfrequenz ω behaftetes Glied enthalten. Im Fall einer homogenen Maschine vereinfacht sich diese Rekursionsformel auf eine Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten; ihre Lösung führt auf einfache trigonometrische Ausdrücke. Insbesondere lassen sich im rein homogenen Fall die Eigenfrequenzen streng und in geschlossener Form angeben. Ferner werden die praktisch wichtigen Fälle einer homogenen Maschine mit einer oder zwei Zusatzdrehmassen eingehend behandelt; allerdings müssen dabei die Eigenwerte aus im allgemeinen nicht explizit lösbaren transzendenten Gleichungen bestimmt werden, wobei zu beachten ist, daß auch komplexe Eigenwerte möglich sind. Es zeigt sich weiterhin, daß die einem komplexen Eigenwert entsprechende Frequenz (theoretisch) imaginär werden kann; dieser Fall dürfte jedoch in der Praxis kaum eintreten, da, wie man durch eine genauere Untersuchung erkennt, hierzu die Einflußzahlen der Nebentorsion die Größenordnung derjenigen der Haupttorsion erreichen müßten. Für die behandelten Schwingungssysteme werden außerdem Formeln zur Ermittlung der Momenten- und Drehwinkelverhältnisse abgeleitet. Als Beispiel wird abschließend eine Vierzylindermaschine mit Schwungrad vollständig durchgerechnet.

(Eingegangen am 14. Dezember 1959.)

Anschrift der Verfasser: Dr. *H. Bufler* und Dipl.-Ing. *F. Kießling*, München 2, Arcisstraße 21, Institut für Technische Mechanik der Technischen Hochschule.

Genäherte Berechnung von Wärmespannungen mit Hilfe der Variationsprinzipien der Elastostatik*

Von **R. Trostel**

1. Einleitung. Der übliche Weg der Berechnung von Wärmespannungen aus den thermisch-elastischen Grundgleichungen führt schon in einfachsten Fällen auf außerordentlich umfangreiche Rechnungen. Oft ist sogar eine exakte Lösung überhaupt nicht möglich. Es liegt daher nahe, z. B. auf der Basis des *Ritz*schen Verfahrens Näherungslösungen für Wärmespannungsprobleme zu suchen. Hierfür ist es erforderlich, das Variationsproblem der (als *Euler*sche Differentialgleichungen anzusehenden) thermisch-elastischen Grundgleichungen zu kennen. Die Formulierung dieses Variationsproblems ist mit Hilfe des *Hamilton*schen Prinzips[1] bzw. im statischen Falle mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen grundsätzlich möglich. Allerdings sind in den hiermit aufzufindenden Variationsintegralen lediglich die Verschiebungen als zu variierende Größen enthalten, so daß sie sich im Hinblick auf eine Näherungsberechnung von Wärmespannungen in vielen Fällen als ungeeignet erweisen. Nun läßt sich jedoch dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ein Variationsprinzip gegenüberstellen[2], das aus jenem mittels einer Variablen-Transformation hervorgeht, und in dem nunmehr die Komponenten des Spannungstensors als zu variierende Funktionen erscheinen. Es entsteht ein Variationsprinzip, das auch unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Kräfte hergeleitet werden kann. Der maßgebende Energieausdruck dieses Variationsproblems findet sich bereits bei *Müller-Breslau*[3], der in einer im Jahre 1884 erschienenen Arbeit mit Hilfe der Arbeitsgleichung der Statik das *Castiglianos*che Prinzip auf thermoelastische Vorgänge erweiterte. Eine allgemeine Fundierung der Arbeit *Müller-Breslaus* unter Einbeziehung wärmetheoretischer Überlegungen wurde von *Domke*[4] im Jahre 1924 geliefert, während in neuerer Zeit zu diesem Problemkreis von *Parkus*[1] durch die Formulierung des *Hamilton*schen Prinzips für thermoelastische Vorgänge ein vertiefender Beitrag geleistet wurde.

Eine praktische Auswertung thermoelastischer Variationsaussagen im Sinne des *Ritz*schen Verfahrens scheint bisher noch nicht in Angriff genommen worden zu sein. Diesem Umstand soll vorliegender Aufsatz* Rechnung tragen, in dem an einigen Beispielen die Leistungsfähigkeit einer Näherungsrechnung bereits mit einfachsten Spannungsansätzen demonstriert werden soll. Sogar die Temperaturfelder selbst werden hierbei durch einfache Ansätze approximiert. Einem Beispiel für stationäre Wärmespannungen folgt die Untersuchung eines instationären Problems (Abkühlung einer Kreisscheibe), wobei jeweils den exakten Lösungen die mittels der Näherungsansätze gefundenen Beziehungen zum Vergleich gegenübergestellt werden. Abschließend wird die Näherungslösung eines räumlichen Problems an einem Hohlzylinder angegeben. Dabei wird in Erweiterung des *Ritz*schen Gedankens eine Methode zur genäherten Lösung von Variationsproblemen benutzt, bei der man auf einfach lösbare Differentialgleichungen für die Näherungsfunktionen geführt wird.[5] Den Beispielen vorangestellt ist ein kurzer Abriß der theoretischen Grundlagen.

2. Theoretische Grundlagen. a) Allgemeine thermoelastische Vorgänge. Bezeichnet man mit $\mathfrak{k}$ eingeprägte Kräfte je Volumeneinheit und mit $\mathfrak{s}_n$ Spannungen an der Körperoberfläche, so wird längs einer Variation des durch den Verschiebungsvektor $\mathfrak{u}$ charakterisierten Deformationszustandes an einem Körper vom Volumen V und der Oberfläche $O(V)$ die äußere Arbeit

$$\delta_u A_a = \int_{[V]} \mathfrak{k}\,\delta\mathfrak{u}\,dV + \int_{[O(V)]} \mathfrak{s}_n\,\delta\mathfrak{u}\,dO \tag{1}$$

---

* Gekürzte Fassung einer von der Technischen Universität Berlin, Fakultät für Bauingenieurwesen, genehmigten Habilitationsarbeit. Der Verfasser spricht hiermit den Berichtern, Herrn Prof. *I. Szabó* und Herrn Prof. *A. Teichmann* seinen Dank aus.

[1] *H. Parkus*, Über eine Erweiterung des Hamiltonschen Prinzips auf thermoelastische Vorgänge. Federhofer-Girkmann-Festschrift, Wien 1950.

[2] *R. Courant* u. *D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik, 2. Aufl., Bd. 1.

[3] *H. Müller Breslau*, Z. Arch. u. Ing.-Ver., Hannover 30 (1884) S. 211.

[4] *O. Domke*, Eisenbau, 12, Nr. 5/6.

[5] Dies verdanke ich einer Anregung, die ich anläßlich eines Seminars am Lehrstuhl für Mechanik (Prof. *Szabó*) von Herrn Prof. *Morgenstern* und Herrn Dr. *André* empfing.

geleistet[1]. Beachtet man hierin die Oberflächenbedingung

$$\mathfrak{s}_u = \mathfrak{n}\,\mathfrak{S}\,,$$

wobei $\mathfrak{S}$ der (mit Rücksicht auf das *Boltzmann*sche Axiom) symmetrische Spannungstensor und $\mathfrak{n}$ der Vektor der äußeren Oberflächennormalen ist, so erhält man unter Heranziehung des *Gauß*schen Satzes für das zweite Integral[2]

$$\int\limits_{[o(V)]} \mathfrak{s}_u\,\delta\mathfrak{u}\,dO = \int\limits_{[o(V)]} (\mathfrak{n}\,\mathfrak{S})\,\delta\mathfrak{u}\,dO = \int\limits_{[o(V)]} (\delta\mathfrak{u}\,\mathfrak{S})\,\mathfrak{n}\,dO = \int\limits_{[V]} \nabla\,(\mathfrak{S}\,\delta\mathfrak{u})\,dV = \int\limits_{[V]} (\nabla\,\mathfrak{S})\,\delta\mathfrak{u}\,dV + \int\limits_{[V]} (\mathfrak{S}\,\nabla)\,\overset{\downarrow}{\delta\mathfrak{u}}\,dV$$

und damit für die Variation der äußeren Arbeit

$$\delta_u A_a = \int\limits_{[V]} (\nabla\,\mathfrak{S} + \mathfrak{k})\,\delta\mathfrak{u}\,dV + \int\limits_{[V]} (\mathfrak{S}\,\nabla)\,\overset{\downarrow}{\delta\mathfrak{u}}\,dV\,. \tag{2}$$

Nun ergibt unter Heranziehung des *Newton*schen Grundgesetzes für das Körperelement

$$\nabla\,\mathfrak{S} + \mathfrak{k} = \varrho\,\frac{\partial^2\mathfrak{u}}{\partial t^2}$$

eine Umformung des ersten Integrales in (2)

$$\begin{aligned}\int\limits_{[V]} (\nabla\,\mathfrak{S} + \mathfrak{k})\,\delta\mathfrak{u}\,dV &= \int\limits_{[V]} \varrho\,\frac{\partial^2\mathfrak{u}}{\partial t^2}\,\delta\mathfrak{u}\,dV = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_{[V]} \varrho\,\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t}\,\delta\mathfrak{u}\,dV\right] - \int\limits_{[V]} \varrho\,\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathfrak{u})\,dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_{[V]} \varrho\,\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t}\,\delta\mathfrak{u}\,dV\right] - \int\limits_{[V]} \varrho\,\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t}\,\delta_u\left(\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t}\right)dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_{[V]} \varrho\,\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t}\,\delta\mathfrak{u}\,dV\right] - \delta_u \int\limits_{[V]} \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t}\right)^2 dV = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_{[V]} \varrho\,\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t}\,\delta\mathfrak{u}\,dV\right] - \delta_u K\,,\end{aligned}$$

wobei

$$K = \int\limits_{[V]} \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t}\right)^2 dV\,, \tag{3a}$$

die kinetische Energie des Systems ist. Auch das zweite Integral in (2) läßt sich umformen. Hierfür benutzt man die Identität

$$(\mathfrak{S}\,\nabla)\,\overset{\downarrow}{\delta\mathfrak{u}} = \mathfrak{S}\,..\,(\nabla\circ\delta\mathfrak{u}) = \mathfrak{S}\,..\,\delta_u(\nabla\circ\mathfrak{u})\,,$$

wobei der Doppelpunkt die doppeltskalare Multiplikation[3] des Spannungstensors $\mathfrak{S}$ mit der Dyade $\nabla\circ\delta\mathfrak{u}$ andeuten soll, und erhält schließlich, da das doppeltskalare Produkt des (symmetrischen) Spannungstensors mit der antimetrischen Dyade

$$\frac{1}{2}\,[\nabla\circ\delta\mathfrak{u} - (\nabla\circ\delta\mathfrak{u})^t]$$

verschwindet[4],

$$(\mathfrak{S}\,\nabla)\,\overset{\downarrow}{\delta\mathfrak{u}} = \mathfrak{S}\,..\,\delta_u\left\{\frac{1}{2}\,[\nabla\circ\mathfrak{u} + (\nabla\circ\mathfrak{u})^t]\right\} = \mathfrak{S}\,..\,\delta_u\,\mathfrak{D} = \delta_u \int\limits_0^{\mathfrak{D}} \mathfrak{S}\,..\,d\mathfrak{D} = \delta_u\,\bar{A}_i\,. \tag{3b}$$

Dabei ist

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2}\,[\nabla\circ\mathfrak{u} + (\nabla\circ\mathfrak{u})^t] \tag{3c}$$

der Verzerrungstensor und $\bar{A}_i$ eine Energiegröße, die bei gleichmäßiger Temperaturverteilung $T = T_0$ in die spezifische Formänderungsenergie übergeht. Somit ist also

$$\int\limits_{[V]} (\mathfrak{S}\,\nabla)\,\overset{\downarrow}{\delta\mathfrak{u}}\,dV = \int\limits_{[V]} \mathfrak{S}\,..\,\delta_u\,\mathfrak{D}\,dV = \delta_u \int\limits_{[V]} \bar{A}_i\,dV = \delta_u\,A_i\,, \tag{3d}$$

so daß man schließlich aus (2)

$$\delta_u A_a = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int\limits_{[V]} \varrho\,\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t}\,\delta\mathfrak{u}\,dV\right] - \delta_u K + \delta_u A_i$$

---

[1] Der, dem Variationssymbol δ beigefügte Index $\mathfrak{u}$ soll darauf hinweisen, daß die in (1) dargestellte Arbeitsvariation allein durch eine Variation des Verschiebungsvektors $\mathfrak{u}$ verursacht zu denken ist.

[2] Durch den Pfeil soll zum Ausdruck kommen, daß der Nabla-Operator allein auf $\delta\mathfrak{u}$ anzuwenden ist.

[3] Siehe hierzu *M. Lagally*, Vektorrechnung, 3. Aufl., Leipzig 1945.

[4] $(\nabla\circ\delta\mathfrak{u})^t$ ist die zur Dyade $\nabla\circ\delta\mathfrak{u}$ transponierte Dyade.

und nach Integration hinsichtlich der Zeit mit der Maßgabe $\delta u(t_0) = \delta u(t_1) = 0$

$$\delta_u \int_{t_0}^{t_1} [A_i - A_a - K]\, dt = 0 \tag{4}$$

erhält. Hierbei ist für die Arbeit der äußeren Kräfte, wenn wir allgemein die Belastung als von den Verschiebungen abhängig annehmen,

$$A_a = \int_{[V]} \left(\int_0^u \mathfrak{k}\, du \right) dV + \int_{[O(V)]} \left(\int_0^u \mathfrak{s}_n\, du \right) dO \tag{5a}$$

und speziell bei konstanter Belastung

$$A_a = \int_{[V]} \mathfrak{k}\, u\, dV + \int_{[O(V)]} \mathfrak{s}_n\, u\, dO \tag{5b}$$

zu setzen.

Für die Darstellung von A_i bzw.

$$\bar{A}_i = \int_0^{\mathfrak{D}} \mathfrak{S} .. d\mathfrak{D} \tag{6}$$

in Abhängigkeit von den Verformungen benötigt man ein Spannungs-Verformungsgesetz, das für elastische Körper und kleine Deformationen genügend genau mittels des durch die Wärmeausdehnungsglieder verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes

$$\mathfrak{S} = \frac{E}{1+\nu}\left[\mathfrak{D} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla u) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_t (T - T_0)\right)\mathfrak{E}\right] \tag{7}$$

beschrieben werden kann. (E ist der Elastizitätsmodul, ν die Querkontraktionszahl, α_t der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient, $T - T_0$ die Temperatur gegenüber einer überall gleichen Anfangstemperatur T_0 des spannungslosen Ausgangszustandes, $\mathfrak{E}$ der Einheitstensor, $\nabla u = \mathrm{Sp}\,\mathfrak{D} = \mathfrak{E} .. \mathfrak{D} = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma = \varepsilon$ die erste Invariante des Verzerrungstensors). Mit Beachtung von

$$\mathfrak{D} .. d\mathfrak{D} = \frac{1}{2}\, d(\mathfrak{D} .. \mathfrak{D}),$$

$$(\nabla u)\, \mathfrak{E} .. d\mathfrak{D} = (\nabla u)\, d(\mathfrak{E} .. \mathfrak{D}) = \nabla u\, d(\nabla u) = \frac{1}{2}\, d(\nabla u)^2,$$

$$(T - T_0)\, \mathfrak{E} .. d\mathfrak{D} = (T - T_0)\, d(\mathfrak{E} .. \mathfrak{D}) = (T - T_0)\, d(\nabla u)$$

erhält man damit aus (6) schließlich

$$\bar{A}_i = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\mathfrak{D} .. \mathfrak{D} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla u)^2 - 2\,\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_t (T - T_0)\nabla u\right], \tag{8}$$

so daß das Variationsprinzip für thermoelastische Vorgänge letztlich

$$\delta_u J = \delta_u \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{[V]} \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\mathfrak{D} .. \mathfrak{D} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla u)^2 - 2\,\frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha_t (T - T_0)\nabla u \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2(1+\nu)}{E}\int_0^u \mathfrak{k}\, du - \frac{(1+\nu)\varrho}{E}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right) dV - \int_{[O(V)]} \left(\int_0^u \mathfrak{s}_n\, du \right) dO \right\} dt = 0 \tag{9}$$

lautet. Der einem bestimmten Temperaturfeld $\vartheta = T - T_0$ und einer bestimmten Belastung zugeordnete Verschiebungszustand macht das Integral J extremal. Diese Aussage ist, wie sich durch Nullsetzen der ersten Variationsableitung bei Beachtung der Oberflächenbedingungen sowie mit $\delta u(t_0) = \delta u(t_1) = 0$ zeigen läßt, der Verschiebungsgleichung

$$\Delta u + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla u) - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha_t \nabla (T - T_0) + \frac{2(1+\nu)}{E}\mathfrak{k} = \frac{2(1+\nu)}{E}\varrho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{10}$$

äquivalent.

b) Bemerkungen zum Temperaturfeld. Da das Variationsproblem (9) keinen Aufschluß über das Temperaturfeld gibt, ist noch zusätzlich die Wärmeleitungsgleichung heranzuziehen. Ihre verallgemeinerte Form[1], die bei der aufzustellenden Wärmemengenbilanz auch die Abkühlungstendenz eines sich ausdehnenden Volumens berücksichtigt, lautet

$$\lambda \Delta (T - T_0) + Q = c_v \gamma \frac{\partial}{\partial t}(T - T_0) + \gamma \frac{c_p - c_v}{3\alpha_t}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla u)$$

wobei γ das spezifische Gewicht, λ die Wärmeleitzahl, c_v die spezifische Wärmemenge bei konstantgehaltenem Volumen, c_p die spezifische Wärmemenge bei konstantgehaltener Normalspan-

[1] Siehe *F. Neumann*, Theorie der Elastizität, Leipzig 1885 sowie Fußnote 4 von Seite 388.

nungssumme $\sigma = \mathfrak{E}\,..\,\mathfrak{S}$ und Q die je Volumeneinheit erzeugte (eingeprägte) Wärmemenge ist, oder mit Beachtung von[1]

$$\gamma\,\frac{c_p - c_v}{3\,\alpha_t} = \frac{E\,\alpha_t\,T}{J\,(1-2\,\nu)}\,,$$

was z. B. aus einem Kreisprozeß unter Heranziehung des Nernstschen Theorems gefunden werden kann, auch

$$\lambda\,\triangle\,(T - T_0) + Q = c_v\,\gamma\,\frac{\partial}{\partial t}\,(T - T_0) + \frac{E\,\alpha_t\,T}{J\,(1-2\,\nu)}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\nabla\,\mathfrak{u})\,. \tag{11}$$

Hierin stellt die linke Seite der Gleichung den Wärmemengenzuwachs je Zeiteinheit im Einheitsvolumen dar, der durch äußere Wärmemengenzufuhr Q und den durch Wärmeleitung verursachten Wärmezustrom bedingt ist. Dieser Wärmemengenzuwachs dient einerseits zur Temperaturerhöhung der zunächst konstantbleibend zu denkenden Volumeneinheit $\left[c_v\,\gamma\,\frac{\partial}{\partial t}\,(T - T_0)\right]$ und andererseits zur Erhaltung der einmal angenommenen Temperatur T bei seiner tatsächlichen Ausdehnung $\left[\gamma\,\frac{c_p - c_v}{3\,\alpha_t}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\nabla\,\mathfrak{u})\right]$. Mit (11) offenbart sich nun die grundsätzliche Schwierigkeit, daß im allgemeinen der Verschiebungszustand $\mathfrak{u}$ und das Temperaturfeld T miteinander verkoppelt sind, so daß in diesen Fällen eine Auswertung des Variationsproblems (9) im Sinne des *Ritz*schen Verfahrens bei vorheriger gesonderter Berechnung des Temperaturverlaufes unmöglich wäre. Nur im stationären Fall ($\partial/\partial t = 0$) ist eine vorherige, gesonderte Berechnung der Temperaturverteilung strenggenommen möglich. Nun zeigt sich jedoch, daß insbesondere für reine Wärmespannungsprobleme bei den üblichen in Frage kommenden festen Körpern mit guter Näherung eine Trennung von Verschiebungs- und Temperaturzustand auch im instationären Falle vorgenommen werden kann, indem man auf der rechten Seite der Gleichung (11) den letzten Ausdruck gegenüber dem ersten Ausdruck vernachlässigt, so daß nur noch eine Gleichung für das Temperaturfeld allein verbleibt:

$$\triangle\,(T - T_0) = \frac{c_v\,\gamma}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(T - T_0) - \frac{Q}{\lambda} = a^2\,\frac{\partial}{\partial t}\,(T - T_0) - \frac{Q}{\lambda}\,, \qquad a^2 = \frac{c_v\,\gamma}{\lambda}\,. \tag{12}$$

Setzt man nämlich in (11) in erster Näherung $\nabla\,\mathfrak{u} \approx \pm\,3\,\alpha_t\,(T - T_0)$, was zumindest im allgemeinen der richtigen Größenordnung der Volumendilatation entsprechen wird, so hat man

$$\lambda\,\triangle\,(T - T_0) + Q = c_v\,\gamma\left[1 \pm \frac{3\,E\,\alpha_t^2\,T}{J\,c_v\,\gamma\,(1-2\,\nu)}\right]\frac{\partial}{\partial t}\,(T - T_0) = c_v\,\gamma\,(1 \pm \varkappa)\,\frac{\partial}{\partial t}\,(T - T_0)\,. \tag{13}$$

Der Wert $\varkappa$ ist in Tabelle 1 für eine Temperatur von z. B. 250 °C = 250 + 273 = 523° (abs. Temp.)[2] für einige Materialien berechnet. Man erkennt, daß, abgesehen von Aluminium und Zink, der in (12) durch die Vernachlässigung von $\varkappa$ begangene Fehler sich auf die zeitliche Ableitung der Temperatur mit weniger als 5% auswirkt. Besonders unerheblich wird die Vernachlässigung bei den wichtigsten Materialien Stahl, Gußeisen und Beton.

Tabelle 1.

Material	E [kg cm^{-2}]	α_t [°C^{-1}]	γ [kg cm^{-3}]	$c_v\left[\frac{\text{kcal}}{\text{kg °C}}\right]$	ν	$\varkappa$
Aluminium	$7{,}2 \cdot 10^5$	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$	$2{,}75 \cdot 10^{-3}$	0,22	0,3	$6{,}80 \cdot 10^{-2}$
Stahl	$21 \cdot 10^5$	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$	$7{,}85 \cdot 10^{-3}$	0,11	0,3	$3{,}21 \cdot 10^{-2}$
Gußeisen	$7 \cdot 10^5$	$1{,}0 \cdot 10^{-5}$	$7{,}70 \cdot 10^{-3}$	0,13	0,3	$0{,}64 \cdot 10^{-2}$
Bronze 90/10	$12 \cdot 10^5$	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$	$8{,}80 \cdot 10^{-3}$	0,09	0,3	$4{,}51 \cdot 10^{-2}$
Nickel	$20 \cdot 10^5$	$1{,}3 \cdot 10^{-5}$	$8{,}80 \cdot 10^{-3}$	0,11	0,3	$3{,}20 \cdot 10^{-2}$
Zink	$10 \cdot 10^5$	$2{,}6 \cdot 10^{-5}$	$7{,}13 \cdot 10^{-3}$	0,09	0,3	$9{,}65 \cdot 10^{-2}$
Beton	$2{,}1 \cdot 10^5$	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$	$2{,}20 \cdot 10^{-3}$	0,21	0,16	$0{,}39 \cdot 10^{-2}$

c) Statische Vorgänge. 1) *Das Prinzip der virtuellen Verrückungen.* Ist die zeitliche Änderung der mechanischen bzw. thermischen Belastungen so geringfügig, daß man die kinetische Energie als von höherer Ordnung klein vernachlässigen kann, so hat man aus (9)

$$\delta_{\mathfrak{u}} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{[V]} \frac{E}{2\,(1+\nu)} \left(\mathfrak{D}\,..\,\mathfrak{D} + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,(\nabla\,\mathfrak{u})^2 - \frac{2\,(1+\nu)}{1-2\,\nu}\,\alpha_t\,(T - T_0)\,\nabla\,\mathfrak{u} - \frac{2\,(1+\nu)}{E} \int_0^{\mathfrak{u}} \mathfrak{k}\,d\mathfrak{u} \right) dV \right.$$
$$\left. - \int_{[O(V)]} \left(\int_0^{\mathfrak{u}} \mathfrak{S}_{\mathfrak{n}}\,d\mathfrak{u} \right) dO \right\} dt = 0\,.$$

[1] T ist die absolute Temperatur und J das mechanische Wärmeäquivalent.

[2] Bei noch höheren Temperaturen sind größere Fehlerquellen schon in der im allgemeinen nicht berücksichtigten Temperaturabhängigkeit der Materialwerte enthalten.

Dies trifft streng nur bei stationären Problemen zu, wo die Größen $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{s}_n$, T und damit $\mathfrak{u}$ zeitunabhängig werden, so daß nach Ausführung der Integration über t und Division durch $(t_1 - t_0)$ das Variationsproblem

$$\delta_{\mathfrak{u}} \Pi = \delta_{\mathfrak{u}} \left\{ \int\limits_{[V]} \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\mathfrak{D}..\mathfrak{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\nabla \mathfrak{u})^2 - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_t (T - T_0) \nabla \mathfrak{u} - \frac{2(1+\nu)}{E} \int\limits_0^{\mathfrak{u}} \mathfrak{k}\, d\mathfrak{u} \right) dV \right.$$
$$\left. - \int\limits_{[O(V)]} \left(\int\limits_0^{\mathfrak{u}} \mathfrak{s}_n\, d\mathfrak{u} \right) dO \right\} = 0 \qquad (14a)$$

bzw. mit Einführung der ersten und zweiten Invarianten des Verzerrungstensors[1]

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \nabla \mathfrak{u} = \mathfrak{E}..\mathfrak{D} = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma , \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left[(\mathfrak{E}..\mathfrak{D})^2 - \mathfrak{D}..\mathfrak{D} \right] = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma + \varepsilon_\gamma \varepsilon_\alpha - \frac{1}{4} (\gamma_{\alpha\beta}^2 + \gamma_{\beta\gamma}^2 + \gamma_{\gamma\alpha}^2) \end{aligned}\right\} \qquad (14b)$$

das Problem

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{\mathfrak{u}} \Pi = 0 , \\ &\Pi = \int\limits_{[V]} \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon^2 - 2(1-2\nu)\bar{\varepsilon} - 2(1+\nu)\alpha_t (T - T_0)\varepsilon \right] dV \\ &\qquad - \int\limits_{[V]} \left(\int\limits_0^{\mathfrak{u}} \mathfrak{k}\, d\mathfrak{u} \right) dV - \int\limits_{[O(V)]} \left(\int\limits_0^{\mathfrak{u}} \mathfrak{s}_n\, d\mathfrak{u} \right) dO \end{aligned}\right\} \qquad (14c)$$

verbleibt. Wir wollen die Gültigkeit von (14a) jedoch auch für langsam zeitlich veränderliche Vorgänge voraussetzen, wie sie i. allg. bei instationären Wärmespannungsproblemen vorliegen. Die zugehörige *Eulers*che Differentialgleichung ist mit Gleichung (10) bis auf ihre rechte Seite, die im vorliegenden Falle durch Null zu ersetzen ist, identisch. Das Variationsproblem (14a) läßt sich auch unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen

$$\delta_{\mathfrak{u}} (A_i - A_a) = 0 \qquad (15)$$

unter Heranziehung des Hookeschen Gesetzes (7) herleiten und geht somit aus einer die Gleichgewichtsbedingungen umfassenden Energieaussage hervor.

2. *Das Prinzip der virtuellen Kräfte.* Ein dem Problem (14a) äquivalentes Variationsproblem, in dem die Spannungen als zu variierende Größen auftreten, gewinnt man durch folgende Überlegung[2]:

Ersetzen wir in (14a) sämtliche Verschiebungsableitungen nach Maßgabe des Hookeschen Gesetzes durch die Spannungen, so erhält man schließlich, nachdem man noch den Ausdruck

$$\int\limits_{[V]} \frac{3}{2E(1-2\nu)} \left[E \alpha_t (T - T_0) \right]^2 dV$$

gestrichen hat, da er einen, bei vorgegebener Temperaturfunktion festen Wert darstellt, das Problem

$$\delta_{\mathfrak{u}} \hat{\Pi} = 0 , \quad \hat{\Pi} = \int\limits_{[V]} \left\{ \frac{1}{2E} \left[(1+\nu) \mathfrak{S}..\mathfrak{S} - \nu (\mathfrak{E}..\mathfrak{S})^2 \right] - \int\limits_0^{\mathfrak{u}} \mathfrak{k}\, d\mathfrak{u} \right\} dV - \int\limits_{[O(V)]} \left(\int\limits_0^{\mathfrak{u}} \mathfrak{s}_n\, d\mathfrak{u} \right) dO ,$$

wobei man sich bei Bildung der Variationsableitung hinsichtlich $\mathfrak{u}$ den Spannungstensor $\mathfrak{S}$ selbstverständlich im Sinne von (7) durch die Verschiebungsableitungen ausgedrückt zu denken hat. Die hierbei auftretenden Variationen $\delta_{\mathfrak{u}} \mathfrak{S}$ sind, wie bereits der Index $\mathfrak{u}$ zum Ausdruck bringt, nicht willkürlich, sondern von der Verschiebungsvariation $\delta\mathfrak{u}$ abhängig. Variiert man in $\hat{\Pi}$ neben $\mathfrak{u}$ auch nach den Spannungen selbst, so muß daher gleichzeitig (7) als Nebenbedingung genannt werden. Man gelangt so zu dem isoperimetrischen Problem

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{\mathfrak{u}, \mathfrak{S}, \Lambda} \bar{\Pi} = 0 , \\ &\bar{\Pi} = \int\limits_{[V]} \left\{ \frac{1}{2E} \left[(1+\nu) \mathfrak{S}..\mathfrak{S} - \nu (\mathfrak{E}..\mathfrak{S})^2 \right] - \int\limits_0^{\mathfrak{u}} \mathfrak{k}\, d\mathfrak{u} \right. \\ &\left. + \Lambda .. \left[\mathfrak{S} - \frac{E}{1+\nu} \left(\mathfrak{D} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \mathfrak{E}..\mathfrak{D} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_t (T - T_0) \right) \mathfrak{E} \right) \right] \right\} dV - \int\limits_{[O(V)]} \left(\int\limits_0^{\mathfrak{u}} \mathfrak{s}_n\, d\mathfrak{u} \right) dO , \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

[1] Durch $\mathfrak{e}_\alpha$, $\mathfrak{e}_\beta$ und $\mathfrak{e}_\gamma$ seien drei zueinander orthogonale Richtungen beschrieben.

[2] S. hierzu *R. Courant* u. *D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik, 2. Aufl. Bd. 1, S. 201 ff.

wobei $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{S}$ sowie der als *Lagrange*scher Parameter fungierende Tensor Λ als zu variierende Größen anzusehen sind. Die natürlichen Bedingungen von (16) erhält man nun durch Nullsetzen der Variationsableitungen hinsichtlich Λ, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{u}$. Die Variation nach Λ ($\delta'_\Lambda \overline{\Pi} = 0$) verifiziert sofort die Nebenbedingung (7), Nullsetzen der Variationsableitung hinsichtlich $\mathfrak{S}$ liefert

$$\delta_{\mathfrak{S}} \overline{\Pi} = \int\limits_{[V]} \left\{ \frac{1}{E} [(1+\nu)\, \mathfrak{S} .. \delta\mathfrak{S} - \nu\, (\mathfrak{E} .. \mathfrak{S})\, (\mathfrak{E} .. \delta\mathfrak{S})] + \Lambda .. \delta\mathfrak{S} \right\} dV = 0$$

bzw. mit

$$(\mathfrak{E} .. \mathfrak{S})\, (\mathfrak{E} .. \delta\mathfrak{S}) = [(\mathfrak{E} .. \mathfrak{S})\, \mathfrak{E}] .. \delta\mathfrak{S}$$

auch

$$\delta_{\mathfrak{S}} \overline{\Pi} = \int\limits_{[V]} \left\{ \frac{1}{E} [(1+\nu)\, \mathfrak{S} - \nu\, (\mathfrak{E} .. \mathfrak{S})\, \mathfrak{E}] + \Lambda \right\} .. \delta\mathfrak{S}\, dV = 0\,,$$

woraus

$$\frac{1}{E} [(1+\nu)\, \mathfrak{S} - \nu\, (\mathfrak{E} .. \mathfrak{S})\, \mathfrak{E}] + \Lambda = 0\,, \qquad \text{also} \qquad \Lambda = -\frac{1+\nu}{E} \left[\mathfrak{S} - \frac{\nu}{1+\nu} (\mathfrak{E} .. \mathfrak{S})\, \mathfrak{E} \right] \tag{17}$$

gefolgert werden kann. Demgegenüber erhält man durch Nullsetzen der Variationsableitung hinsichtlich $\mathfrak{u}$, wenn wir

$$\delta_{\mathfrak{u}} \int\limits_0^{\mathfrak{u}} \mathfrak{k}\, d\mathfrak{u} = \mathfrak{k}(\mathfrak{u})\, \delta\mathfrak{u} = \delta_{\mathfrak{u}} (\mathfrak{k}\, \overset{\downarrow}{\mathfrak{u}})\,, \qquad \delta_{\mathfrak{u}} \int\limits_0^{\mathfrak{u}} \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}}\, d\mathfrak{u} = \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{u})\, \delta\mathfrak{u} = \delta_{\mathfrak{u}} (\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}}\, \overset{\downarrow}{\mathfrak{u}}) \tag{18}$$

schreiben und durch den Doppelpfeil über $\mathfrak{u}$ andeuten, daß sich die Variation hinsichtlich $\mathfrak{u}$ allein auf den Verschiebungsvektor beschränkt,

$$\delta_{\mathfrak{u}} \overline{\Pi} = \delta_{\mathfrak{u}} \left[\int\limits_{[V]} \left\{ -\mathfrak{k}\, \overset{\downarrow}{\mathfrak{u}} - \frac{E}{1+\nu} \Lambda .. \left[\mathfrak{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\mathfrak{E} .. \mathfrak{D})\, \mathfrak{E} \right] \right\} dV - \int\limits_{[O(V)]} \mathfrak{s}_{\mathfrak{n}}\, \overset{\downarrow}{\mathfrak{u}}\, dO \right] = 0\,,$$

bzw. wegen

$$\int\limits_{[O(V)]} (\mathfrak{n}\, \mathfrak{S})\, \delta\mathfrak{u}\, dO = \int\limits_{[O(V)]} (\mathfrak{S}\, \delta\mathfrak{u})\, \mathfrak{n}\, dO = \int\limits_{[V]} \nabla\, (\mathfrak{S}\, \delta\mathfrak{u})\, dV = \int\limits_{[V]} [(\nabla\, \mathfrak{S})\, \delta\mathfrak{u} + (\mathfrak{S}\, \nabla)\, \overset{\downarrow}{\delta\mathfrak{u}}]\, dV$$

$$= \int\limits_{[V]} [(\nabla\, \mathfrak{S})\, \delta\mathfrak{u} + \mathfrak{S} .. \delta_{\mathfrak{u}}\, \mathfrak{D}]\, dV$$

die Relation

$$\delta_{\mathfrak{u}} \overline{\Pi} = \delta_{\mathfrak{u}} \left[-\int\limits_{[V]} \left\{ (\nabla\, \mathfrak{S} + \mathfrak{k})\, \overset{\downarrow}{\mathfrak{u}} + \frac{E}{1+\nu} \Lambda .. \left[\mathfrak{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\mathfrak{E} .. \mathfrak{D})\, \mathfrak{E} \right] + \mathfrak{S} .. \mathfrak{D} \right\} dV \right]$$

$$- \int\limits_{[O(V)]} (\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}\, \mathfrak{S})\, \delta\mathfrak{u}\, dO\,,$$

aus der einerseits die Oberflächenbedingung

$$\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}} - \mathfrak{n}\, \mathfrak{S} = 0 \qquad \text{auf } O(V) \tag{19}$$

und andererseits wegen

$$\Lambda .. \delta_{\mathfrak{u}} (\mathfrak{E} .. \mathfrak{D})\, \mathfrak{E} = \Lambda .. \mathfrak{E}\, \delta_{\mathfrak{u}} (\mathfrak{E} .. \mathfrak{D}) = [(\Lambda .. \mathfrak{E})\, \mathfrak{E}] .. \delta_{\mathfrak{u}}\, \mathfrak{D}$$

schließlich

$$-\int\limits_{[V]} \left\{ (\nabla\, \mathfrak{S} + \mathfrak{k})\, \delta\mathfrak{u} + \left[\mathfrak{S} + \frac{E}{1+\nu} \Lambda + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\Lambda .. \mathfrak{E})\, \mathfrak{E} \right] .. \delta_{\mathfrak{u}}\, \mathfrak{D} \right\} dV = 0 \tag{20}$$

gefolgert werden kann. Setzt man hierin nun die natürliche Bedingung (17) ein, so gewinnt man, da dann

$$\mathfrak{S} + \frac{E}{1+\nu} \Lambda + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\Lambda .. \mathfrak{E})\, \mathfrak{E} = 0$$

wird, als weitere natürliche Bedingung aus (20) die Gleichgewichtsbedingung

$$\nabla\, \mathfrak{S} + \mathfrak{k} = 0 \qquad \text{in } (V)\,. \tag{21}$$

Durch Elimination von Λ gemäß (17) erhält man nunmehr aus (16)

$$\delta_{\mathfrak{u},\mathfrak{S}}\,\bar{\Pi}=0\,,$$
$$\bar{\Pi}=\int\limits_{[V]}\left\{-\frac{1}{2E}[(1+\nu)\,\mathfrak{S}..\mathfrak{S}-\nu\,(\mathfrak{E}..\mathfrak{S})^2+2E\alpha_t(T-T_0)\,(\mathfrak{E}..\mathfrak{S})]-[\mathfrak{k}\,\mathfrak{u}-\mathfrak{S}..\mathfrak{D}]\right\}dV$$
$$-\int\limits_{[O(V)]}\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{u}\,dO\,,$$

wobei wieder zu beachten ist, daß $\mathfrak{k}(\mathfrak{u})$ bzw. $\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{u})$ bei der Variation hinsichtlich $\mathfrak{u}$ nicht mitvariiert werden, und mit

$$\mathfrak{S}..\mathfrak{D}=(\mathfrak{S}\,\nabla)\,\overset{\downarrow}{\mathfrak{u}}=\nabla\,(\mathfrak{S}\,\mathfrak{u})-(\nabla\,\mathfrak{S})\,\mathfrak{u}\,,\qquad\int\limits_{[V]}\nabla\,(\mathfrak{S}\,\mathfrak{u})\,dV=\int\limits_{[O(V)]}(\mathfrak{n}\,\mathfrak{S})\,\mathfrak{u}\,dO$$

schließlich

$$\left.\begin{aligned}&\delta_{\mathfrak{u},\mathfrak{S}}\,\bar{\Pi}=0\,,\\&\bar{\Pi}=-\int\limits_{[V]}\left\{\frac{1}{2E}[(1+\nu)\,\mathfrak{S}..\mathfrak{S}-\nu\,(\mathfrak{E}..\mathfrak{S})^2+2E\alpha_t(T-T_0)\,(\mathfrak{E}..\mathfrak{S})]+(\nabla\,\mathfrak{S}+\mathfrak{k})\,\mathfrak{u}\right\}dV\\&\quad-\int\limits_{[O(V)]}[\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}}-\mathfrak{n}\,\mathfrak{S}]\,\mathfrak{u}\,dO\,.\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

Da hierin die Variationsableitung hinsichtlich $\mathfrak{u}$ als natürliche Bedingungen sofort wieder die Gleichgewichtsbedingungen (21) bzw. die Oberflächenbedingung (19) liefert, können wir die Wirkungsweise des Verschiebungsvektors $\mathfrak{u}$ in (22) als diejenige eines Lagrangeschen Parameters auffassen, so daß dem Problem (22) das folgende Variationsproblem äquivalent ist:

$$\delta_{\mathfrak{S}}\,\Pi^*=0\,,\qquad\Pi^*=\int\limits_{[V]}\left\{\frac{1}{2E}[(1+\nu)\,\mathfrak{S}..\mathfrak{S}-\nu\,(\mathfrak{E}..\mathfrak{S})^2+2E\alpha_t(T-T_0)\,(\mathfrak{E}..\mathfrak{S})]\right\}dV\qquad(23\,\mathrm{a})$$

mit den Nebenbedingungen

$$\nabla\,\mathfrak{S}+\mathfrak{k}=0\ \text{ in }[V]\,,\qquad\mathfrak{s}_{\mathfrak{n}}-\mathfrak{n}\,\mathfrak{S}=0\ \text{ auf }[O(V)]\,.\qquad(23\,\mathrm{b})$$

Von sämtlichen, im Sinne der Gleichgewichts- und Oberflächenbedingungen möglichen Spannungszuständen macht der tatsächliche Spannungszustand das Integral $\bar{\Pi}^*$ extremal.

Mit (23a) und (23b) ist nunmehr die Variablen-Transformation durchgeführt. Bevor wir auf Anwendungen übergehen, in denen ausschließlich die Form (23) Verwendung findet, seien kurz die *Euler*schen Gleichungen des Problems (23) verifiziert. Es ist

$$\delta_{\mathfrak{S}}\,\bar{\Pi}=-\int\limits_{[V]}\left\{\frac{1}{E}[(1+\nu)\,\mathfrak{S}..\delta\mathfrak{S}-\nu\,(\mathfrak{E}..\mathfrak{S})\,(\mathfrak{E}..\delta\mathfrak{S})+E\alpha_t(T-T_0)\,(\mathfrak{E}..\delta\mathfrak{S})]+(\nabla\,\delta\mathfrak{S})\,\mathfrak{u}\right\}dV$$
$$+\int\limits_{[O(V)]}(\delta\mathfrak{S}\,\mathfrak{n})\,\mathfrak{u}\,dO\,,$$

woraus mit Beachtung von

$$(\nabla\,\delta\mathfrak{S})\,\mathfrak{u}=\nabla\,(\delta\mathfrak{S}\,\mathfrak{u})-(\delta\,\mathfrak{S}\,\nabla)\,\mathfrak{u}=\nabla\,(\delta\mathfrak{S}\,\mathfrak{u})-\delta\mathfrak{S}..\frac{1}{2}\,[\nabla\circ\mathfrak{u}+(\nabla\circ\mathfrak{u})^t]$$

sowie mit[1]

$$\int\limits_{[V]}\nabla\,(\delta\mathfrak{S}\,\mathfrak{u})\,dV=\int\limits_{[O(V)]}(\delta\mathfrak{S}\,\mathfrak{u})\,\mathfrak{n}\,dO=\int\limits_{[O(V)]}(\delta\mathfrak{S}\,\mathfrak{n})\,\mathfrak{u}\,dO$$

die Beziehung

$$-\int\limits_{[V]}\left\{\frac{1+\nu}{E}\left[\mathfrak{S}-\left(\frac{\nu}{1+\nu}(\mathfrak{E}..\mathfrak{S})-\frac{E\alpha_t}{1+\nu}(T-T_0)\right)\mathfrak{E}\right]-\frac{1}{2}\,[\nabla\circ\mathfrak{u}+(\nabla\circ\mathfrak{u})^t]\right\}..\delta\mathfrak{S}\,dV=0\,,$$

also

$$\frac{1}{2}\,[\nabla\circ\mathfrak{u}+(\nabla\circ\mathfrak{u})^t]=\frac{1+\nu}{E}\left[\mathfrak{S}-\left(\frac{\nu}{1+\nu}(\mathfrak{E}..\mathfrak{S})-\frac{E\alpha_t}{1+\nu}(T-T_0)\right)\mathfrak{E}\right]=\mathfrak{D}\qquad(24)$$

[1] Ebenso wie der Spannungstensor selbst, soll seine Variation $\delta\mathfrak{S}$ ein symmetrischer Tensor sein. Hiermit wird die Gültigkeit der Momentengleichgewichtsbedingung am Element auch für die Spannungsvariationen gefordert.

entsteht. Man gewinnt den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und dem (durch den Spannungstensor ausgedrückten) Deformationstensor und damit wegen[1]

$$\nabla \times \mathfrak{D} \times \nabla = (\mathfrak{D} \times \nabla)^t \times \nabla = \left\{\frac{1}{2}[\nabla \circ \mathfrak{u} + (\nabla \circ \mathfrak{u})^t] \times \nabla\right\}^t \times \nabla = 0$$

schließlich die Relation

$$(\mathfrak{S} \times \nabla)^t \times \nabla - \left\{\left[\frac{\nu}{1+\nu}(\mathfrak{E}\,..\,\mathfrak{S}) - \frac{E\,\alpha_t}{1+\nu}(T - T_0)\right]\mathfrak{E} \times \nabla\right\}^t \times \nabla = 0\,, \tag{25}$$

aus der nach verschiedenen Umformungen und mit Beachtung der Gleichgewichtsbedingung (21) schließlich die durch die Temperaturglieder erweiterten *Beltrami*schen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \triangle \mathfrak{S} + \frac{1}{1+\nu}\nabla \circ (\nabla \sigma) + [\nabla \circ \mathfrak{k} + (\nabla \circ \mathfrak{k})^t] + \frac{\nu}{1-\nu}(\nabla \mathfrak{k})\,\mathfrak{E} + \frac{E\,\alpha_t}{1+\nu}\left[\frac{1+\nu}{1-\nu}\triangle \vartheta\,\mathfrak{E} + \nabla \circ (\nabla \vartheta)\right] = 0\,, \\ \sigma = \mathfrak{E}\,..\,\mathfrak{S},\ \vartheta = T - T_0 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

hervorgehen. Abschließend hierzu sei noch erwähnt, daß das Variationsprinzip (23) auch unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Kräfte[2] gewonnen werden kann. Es geht somit aus einer, die Verträglichkeitsbedingungen umfassenden Energieaussage hervor.

3. Beispiele für die genäherte Auswertung des Prinzips der virtuellen Kräfte. a) Allgemeines. Bei den folgenden Beispielen handelt es sich um Wärme-Selbstspannungsprobleme, bei denen weder Volumen- noch Oberflächenkräfte beteiligt sind. Mit $\mathfrak{k} = 0$ ergibt sich somit aus (23), wenn man dort noch gemäß

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}\,..\,\mathfrak{E} = \sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sigma_\gamma = \sigma\,, \\ \frac{1}{2}[(\mathfrak{S}\,..\,\mathfrak{E})^2 - \mathfrak{S}\,..\,\mathfrak{S}] = \sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\gamma + \sigma_\gamma \sigma_\alpha - (\tau_{\alpha\beta}^2 + \tau_{\beta\gamma}^2 + \tau_{\gamma\alpha}^2) = \bar{\sigma} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

die erste bzw. zweite Invariante σ bzw. $\bar{\sigma}$ des Spannungstensors einführt

$$\delta \Pi^* = 0\,, \qquad \Pi^* = \int\limits_{[V]} \frac{1}{2E}[\sigma^2 - 2\,(1+\nu)\,\bar{\sigma} + 2\,E\,\alpha_t\,(T - T_0)\,\sigma]\,dV \tag{28a}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\nabla\,\mathfrak{S} = 0 \quad \text{in } (V)\,, \qquad \mathfrak{s}_n = \mathfrak{n}\,\mathfrak{S} = 0 \quad \text{auf } O(V)\,. \tag{28b}$$

Zur Auswertung von (28) im Sinne des Ritzschen Verfahrens werden nunmehr für die jeweils in Frage kommenden Spannungen gewisse, den Randbedingungen sowie den Gleichgewichtsbedingungen genügende und mit willkürlichen Konstanten c_k versehene Ansätze formuliert. Nach Einsetzen in das Variationsintegral folgen die Konstanten als Lösungen eines sich aus den Extremalbedingungen $\partial \Pi^*/\partial c_k = 0$ ergebenden linearen Gleichungssystems. Damit ist dann ein Spannungszustand gefunden, der den Gleichgewichts- und Oberflächenbedingungen sowie im Mittel auch den Verträglichkeitsbedingungen genügt. Die in den beiden folgenden Abschnitten b) und c) behandelten Beispiele wurden in dieser Weise untersucht, und die erhaltenen Resultate den exakten Ergebnissen gegenübergestellt. Das in Abschnitt d) untersuchte räumliche Problem hingegen zeigt eine mögliche Erweiterung des Ritzschen Verfahrens in dem Sinne, daß anstelle von Gleichungssystemen für Konstanten einfach lösbare Differentialgleichungen für die, die Spannungen approximierenden Näherungsfunktionen aufgestellt werden können.

---

[1] Die vektorische Multiplikation einer Dyade mit einem Vektor ist durch $(\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}) \times \mathfrak{c} = \mathfrak{a} \circ (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})$ definiert (S. hierzu das bereits zitierte Werk von M. Lagally). Daher ist zunächst

$$\mathfrak{D} \times \nabla = \frac{1}{2}[(\nabla \circ \mathfrak{u}) \times \nabla + (\mathfrak{u} \circ \nabla) \times \nabla] = \frac{1}{2}[\nabla \circ (\mathfrak{u} \times \nabla) + \mathfrak{u} \circ (\nabla \times \nabla)] = -\frac{1}{2}\nabla \circ (\nabla \times \mathfrak{u})\,,$$

und damit weiterhin

$$(\mathfrak{D} \times \nabla)^t \times \nabla = -\frac{1}{2}[(\nabla \times \mathfrak{u}) \circ \nabla] \times \nabla = -\frac{1}{2}(\nabla \times \mathfrak{u}) \circ (\nabla \times \nabla) = 0\,.$$

[2] *K. Marguerre*, Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs, Berlin 1950.

b) Achsensymmetrische Erwärmung einer gelochten Kreisscheibe (Abb. 1). Ein achsensymmetrisches Temperaturfeld ruft einen achsensymmetrischen Spannungszustand hervor, der sich, wenn wir die Scheibe als dünn annehmen, auf Radialspannungen σ_r und Tangentialspannungen σ_t beschränkt (ebener Spannungszustand). Für diese beiden Spannungsgrößen folgt aus der radialen Gleichgewichtsbedingung am Element

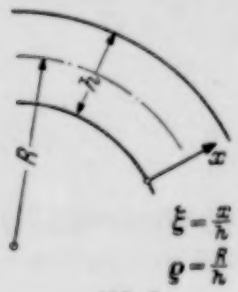


Abb. 1.

$$\sigma_t = \frac{d}{dr}(r\,\sigma_r)\,. \tag{29}$$

Sind $f_{\sigma_r}^{(k)}(\xi)$ den Randbedingungen $f(0) = f(1) = 0$ genügende Funktionen, so erfüllt der Ansatz

$$\sigma_r(\xi) = \sum_{k=1}^{n} c_k f_{\sigma_r}^{(k)}(\xi) \tag{30a}$$

die Randbedingungen für die Radialspannungen $[\sigma_r(0) = \sigma_r(1) = 0]$, und man erhält mit (30a) aus (29) den auf Grund der Gleichgewichtsbedingung für σ_t zwangsläufigen Ansatz

$$\sigma_t(\xi) = \frac{d}{dr}(r\,\sigma_r) = \frac{d}{d\xi}\left[\left(\varrho - \frac{1}{2} + \xi\right)\sigma_r\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{d}{d\xi}\left[\left(\varrho - \frac{1}{2} + \xi\right) f_{\sigma_r}^{(k)}\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k f_{\sigma_t}^{(k)}(\xi)\,. \tag{30b}$$

Der Wärmespannungszustand ist somit bereits bis auf die willkürlichen Konstanten c_k bestimmt. Für diese folgt schließlich, nachdem man die Spannungsansätze in (28a) eingesetzt hat (wobei für das Volumenelement

$$dV = 2\pi r\,dr = 2\pi\left(R - \frac{h}{2} + x\right)dx = 2\pi h^2\left(\varrho - \frac{1}{2} + \xi\right)d\xi$$

gesetzt und die Dicke der Kreisscheibe mit 1 angenommen ist, da sie sich als gemeinsamer Faktor in der folgenden Rechnung heraushebt), aus den Extremalbedingungen $\partial \Pi^*/\partial c_i = 0$ mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{ik} &= \int_0^1 \left[\left(f_{\sigma_r}^{(i)} + f_{\sigma_t}^{(i)}\right)\left(f_{\sigma_r}^{(k)} + f_{\sigma_t}^{(k)}\right) - (1+\nu)\left(f_{\sigma_r}^{(i)} f_{\sigma_r}^{(k)} + f_{\sigma_t}^{(i)} f_{\sigma_r}^{(k)}\right)\right]\left(\varrho - \frac{1}{2} + \xi\right)d\xi\,, \\ \beta_i &= \int_0^1 E\,\alpha_t\,\vartheta(\xi)\left(f_{\sigma_r}^{(i)} + f_{\sigma_t}^{(i)}\right)\left(\varrho - \frac{1}{2} + \xi\right)d\xi\,, \qquad \vartheta = T - T_0 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

das lineare Gleichungssystem

$$\beta_i + \sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_{ik} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)\,. \tag{32}$$

Begnügt man sich speziell mit einer Approximation durch nur eine Funktion, d. h. setzt man

$$\sigma_r = c_1 f_{\sigma_r}^{(1)}(\xi)\,, \qquad \sigma_t = c_1 \frac{d}{d\xi}\left[\left(\varrho - \frac{1}{2} + \xi\right) f_{\sigma_r}^{(1)}\right] = c_1 f_{\sigma_t}^{(1)}(\xi)\,, \tag{33a, b}$$

so folgt aus (32)

$$c_1 = -\frac{\beta_1}{\alpha_{11}} = -\frac{\displaystyle\int_0^1 E\,\alpha_t\,\vartheta\left[f_{\sigma_r}^{(1)} + f_{\sigma_t}^{(1)}\right]\left[\varrho - \frac{1}{2} + \xi\right]d\xi}{\displaystyle\int_0^1 \left[\left(f_{\sigma_r}^{(1)} + f_{\sigma_t}^{(1)}\right)^2 - 2(1+\nu) f_{\sigma_r}^{(1)} f_{\sigma_t}^{(1)}\right]\left[\varrho - \frac{1}{2} + \xi\right]d\xi}\,. \tag{33c}$$

Wir untersuchen nun den konkreten Fall einer unter vorgegebener Innen- bzw. Außentemperatur ϑ_i bzw. ϑ_a stehenden Kreisscheibe. Für das Temperaturfeld innerhalb des Kreisringes machen wir, ungeachtet des tatsächlichen logarithmischen Verlaufs, vereinfachend den linearen Ansatz

$$\vartheta(\xi) = \vartheta_M + \frac{\Delta\vartheta}{2}(1 - 2\,\xi)\,, \qquad \vartheta_M = \frac{1}{2}(\vartheta_i + \vartheta_a)\,, \qquad \Delta\vartheta = \vartheta_i - \vartheta_a\,, \tag{34}$$

während für $f_{\sigma_r}^{(1)}(\xi)$ mit Rücksicht auf die beiden zu erfüllenden Randbedingungen $f(0) = f(1) = 0$ ebenfalls der denkbar einfachste Ansatz, nämlich eine quadratische Parabel

$$f_{\sigma_r}^{(1)}(\xi) = \xi - \xi^2 \tag{35a}$$

und damit

$$f_{\sigma_t}^{(1)}(\xi) = \frac{d}{d\xi}\left[\left(\varrho - \frac{1}{2} + \xi\right)(\xi - \xi^2)\right] = \varrho - \frac{1}{2} + (3 - 2\varrho)\,\xi - 3\,\xi^2 \tag{35b}$$

verwendet werden. Die hiermit durchgeführte Auswertung der in (33c) vorkommenden Integrale liefert schließlich, wenn wir konstante Stoffwerte E und α_t voraussetzen,

$$c_1 = -\frac{E\,\alpha_t\,\Delta\vartheta}{2\,\varrho}\,\frac{1 + 20\,\varrho^2}{9 + 20\,\varrho^2}\,. \tag{35c}$$

Für die Wärmespannungen hat man damit als Näherungslösung

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &\approx c_1 f_{\sigma_r}^{(1)}(\xi) = -\frac{E\,\alpha_t\,\Delta\vartheta}{2\,\varrho}\,\frac{1 + 20\,\varrho^2}{9 + 20\,\varrho^2}\,(\xi - \xi^2)\,, \\ \sigma_t &\approx c_1 f_{\sigma_t}^{(1)}(\xi) = -\frac{E\,\alpha_t\,\Delta\vartheta}{2}\,\frac{1 + 20\,\varrho^2}{9 + 20\,\varrho^2}\left[1 - 2\,\xi - \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{2} - 3\,(\xi - \xi^2)\right)\right], \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

während sich exakt für denselben Fall

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r(\xi) &= -\frac{E\,\alpha_t\,\Delta\vartheta}{4}\left[\frac{\ln\dfrac{(2\,\varrho)^2 - 1}{(2\,\varrho - 1 + 2\,\xi)^2}}{\ln\dfrac{2\,\varrho + 1}{2\,\varrho - 1}} + \varrho\left[1 + \left(\frac{1}{2\,\varrho}\right)^2\right] - \varrho\,\frac{\left[1 - \left(\dfrac{1}{2\,\varrho}\right)^2\right]^2}{\left[1 - \dfrac{1}{2\,\varrho} + \dfrac{\xi}{\varrho}\right]^2}\right], \\ \sigma_t(\xi) &= -\frac{E\,\alpha_t\,\Delta\vartheta\,\varrho}{4}\left[\frac{\left[1 - \left(\dfrac{1}{2\,\varrho}\right)^2\right]^2}{\left[1 - \dfrac{1}{2\,\varrho} + \dfrac{\xi}{\varrho}\right]^2} + 1 + \left(\frac{1}{2\,\varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\ln\dfrac{(2\,\varrho)^2 - 1}{(2\,\varrho - 1 + 2\,\xi)^2}}{\ln\dfrac{2\,\varrho + 1}{2\,\varrho - 1}} - 2\right] \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

ergibt. Die Formeln (36) und (37) sind für den Fall $\varrho = (R/h) = 5$ in Abb. 2 graphisch dargestellt (Näherungslösung gestrichelt). Man erkennt eine besonders gute Übereinstimmung bei den Radialspannungen, während die Tangentialspannungen etwas schlechter approximiert werden. Der Fehler bei den Radialspannungen beträgt nur etwa 5%, bei den Tangentialspannungen etwa 18%. Die größere Ungenauigkeit der Tangentialspannungen erklärt sich aus dem Umstand, daß $f_{\sigma_t}^{(1)}(\xi)$ aus der angesetzten Näherungsfunktion $f_{\sigma_r}^{(1)}(\xi)$ gemäß (30b) durch einen Differentiationsprozeß gewonnen

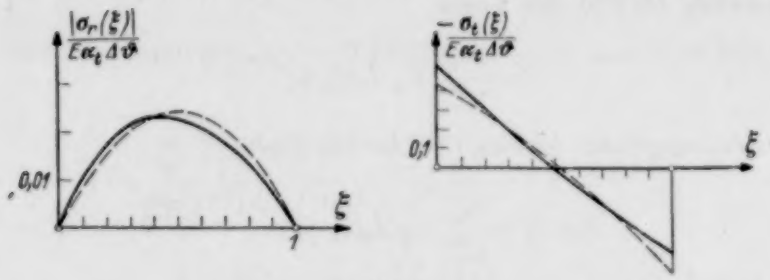


Abb. 2.

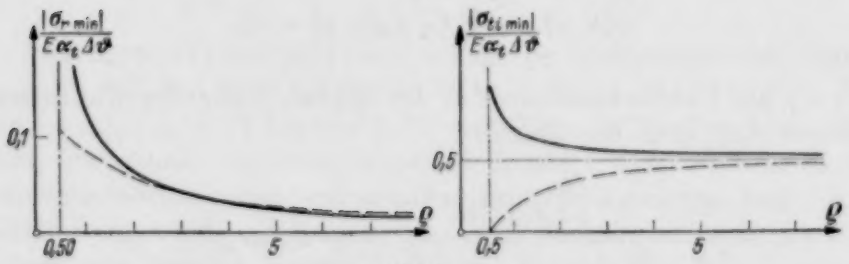


Abb. 3.

wurde. In Abb. 3 sind die extremale Radialspannung $|\sigma_{r\,\min}|$ sowie die extremale Ringspannung am Innenrande $|\sigma_{t\,i\,\min}|$ in Abhängigkeit von $\varrho = R/h$ aufgetragen. Man erkennt, daß die Übereinstimmung der Näherungswerte mit den exakten Werten bei kleinen ϱ sehr schlecht wird. Dies läßt sich jedoch durch verfeinerte Näherungsansätze für $f_{\sigma_r}^{(1)}$ bzw. $f_{\sigma_t}^{(1)}$, die z. B. noch die Kompatibilitätsbedingung

$$\varepsilon_r - \frac{d}{dr}(r\,\varepsilon_t) = 0$$

an verschiedenen Stellen der Scheibe befriedigen, sowie durch eine genauere Beschreibung des Temperaturfeldes beheben.

c) Abkühlung einer dünnen Kreisscheibe. 1. *Exakte Lösung.* Ausgehend von der Differentialgleichung der Wärmeleitung für eine an ihren Oberflächen Wärme in ein Medium der Temperatur Null abgebenden dünne Platte[1] vom Halbmesser R und der Dicke h

$$\Delta\vartheta - b^2\,\vartheta = a^2\,\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\,, \qquad a^2 = \frac{c\,\gamma}{\lambda}\,, \qquad b^2 = \frac{2\,\alpha}{\lambda\,h} \tag{38}$$

erhält man für den rotationssymmetrischen Fall mit dem Produktansatz

$$\vartheta = f(r)\,e^{-\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 t} \tag{39}$$

aus (38) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{df}{dr} + \varkappa^2 f = 0\,, \qquad \omega^2 = \varkappa^2 + b^2\,, \tag{40}$$

deren Lösung mit Rücksicht darauf, daß in Plattenmitte die Temperatur endlich bleiben muß,

$$f = C\,J_0(\varkappa\,r) = C\,J_0(\xi\,\varrho)\,, \qquad \varrho = \frac{r}{R}\,, \qquad \xi = \varkappa\,R\,, \tag{41}$$

lautet. Der Wärmeübergang in ein Medium der Temperatur Null am Plattenrande $r = R$ fordert unter Heranziehung des *Newton*schen Abkühlungstheorems die Randbedingung

$$\vartheta(R,t) + \frac{\lambda}{\alpha}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\bigg|_{R,t} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad f(R) + \frac{\lambda}{\alpha}\,\frac{df}{dr}\bigg|_{R} = 0\,, \tag{42}$$

woraus mit (41) die Eigenwertgleichung

$$\xi\,J_1(\xi) = \frac{\alpha\,R}{\lambda}\,J_0(\xi) = N\,J_0(\xi) \tag{43}$$

hervorgeht. Ihre Lösungsschar $\xi_k(N)$ bestimmt nach (40) auch die Abklingungswerte $\omega = \omega_k$,

$$\omega_k^2 = \varkappa_k^2 + b^2 = b^2 + \frac{\xi_k^2}{R^2} = \frac{1}{R^2}\left[\xi_k^2 + 2\,\frac{R}{h}\,\frac{\alpha\,R}{\lambda}\right], \tag{44}$$

und es ist somit die Lösung (41) in der Form

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\,J_0(\xi_k\,\varrho)\,,$$

also entsprechend der ursprüngliche Ansatz (39) in der Form

$$\vartheta(\varrho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\,J_0(\xi_k\,\varrho)\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t} \tag{45}$$

verallgemeinerungsfähig. Aus der Anfangsbedingung

$$\vartheta(\varrho,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\,J_0(\xi_k\,\varrho) = \vartheta_0$$

erhält man nun die C_k als Fourierkoeffizienten der Entwicklung der Funktion $\vartheta = \vartheta_0$ nach den Besselschen Funktionen $J_0(\xi_k\,\varrho)$ in der Gestalt

$$C_k = \vartheta_0\,\frac{\int_0^{\xi_k} z\,J_0(z)\,dz}{\int_0^{\xi_k} z\,J_0^2(z)\,dz} = \frac{2\,J_1(\xi_k)}{\xi_k\,[J_0^2(\xi_k) + J_1^2(\xi_k)]}\,, \tag{46}$$

so daß schließlich für das Temperaturfeld

$$\vartheta(\varrho,t) = 2\,\vartheta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_k)\,J_0(\xi_k\,\varrho)}{\xi_k\,[J_0^2(\xi_k) + J_1^2(\xi_k)]}\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t} \tag{47}$$

hervorgeht.

[1] *Melan* u. *Parkus*, Wärmespannungen stationärer Temperaturfelder, Wien 1953. Es bedeuten c die spez. Wärmemenge je Gewichtseinheit und λ bzw. α die Wärmeleit- bzw. Übergangszahl.

Zur Ermittlung der zugehörigen Wärmespannungen geht man von den Gleichgewichtsbedingungen des ebenen achsensymmetrischen Problems

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_r) - \sigma_t = 0 \tag{48}$$

und den thermisch-elastischen Spannungs-Dehnungsbeziehungen[1]

$$\varepsilon_r = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_t) + \alpha_t(\vartheta - \vartheta_0), \qquad \varepsilon_t = \frac{v}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\,\sigma_r) + \alpha_t(\vartheta - \vartheta_0), \tag{49a}$$

bzw.

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial r} + \nu\,\frac{v}{r} - (1+\nu)\,\alpha_t(\vartheta - \vartheta_0)\right], \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{v}{r} + \nu\,\frac{\partial v}{\partial r} - (1+\nu)\,\alpha_t(\vartheta - \vartheta_0)\right] \tag{49b}$$

aus, und erhält, indem man (49b) in (48) einsetzt, schließlich die Verschiebungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(r\,v)\right] = (1+\nu)\,\alpha_t\,\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \tag{50a}$$

mit der Lösung

$$v(r,t) = (1+\nu)\,\alpha_t\,\frac{1}{r}\int r\,\vartheta(r,t)\,dr + C_1(t)\,r + \frac{C_2(t)}{r}. \tag{50b}$$

Unter Beachtung von

$$\int r\,J_0(\xi_k\,\varrho)\,dr = \frac{R}{\xi_k}\,r\,J_1(\xi_k\,\varrho)$$

gewinnt man nun aus (50b), wenn man (47) einsetzt und die Integration hinsichtlich r ausführt, nachdem man noch die willkürliche Zeitfunktion $C_2(t)$ wegen $v(0,t) = 0$ gestrichen hat,

$$v(r,t) = C_1(t)\,r + 2\,(1+\nu)\,\alpha_t\,\vartheta_0\,R\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(\xi_k)\,J_1(\xi_k\,\varrho)}{\xi_k^2\,[J_0^2(\xi_k) + J_1^2(\xi_k)]}\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t}, \tag{50c}$$

so daß für die Radialspannungen nach (49b) schließlich

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu}\left[C_1(t) + \alpha_t\,\vartheta_0 - (1-\nu)\,\frac{\alpha_t}{r^2}\int r\,\vartheta\,dr\right]\\ &= \frac{E}{1-\nu}\left[C_1(t) + \alpha_t\,\vartheta_0 - 2\,(1-\nu)\,\frac{\alpha_t\,\vartheta_0\,R}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(\xi_k)\,J_1(\xi_k\,\varrho)}{\xi_k^2\,[J_0^2(\xi_k) + J_1^2(\xi_k)]}\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t}\right]\end{aligned} \tag{50d}$$

hervorgeht. Aus der Randbedingung $\sigma_r|_{R,t} = 0$ folgt nun $C_1(t)$, und man hat endgültig die Wärmespannungen

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r(\varrho,t) &= -2\,E\,\alpha_t\,\vartheta_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[\frac{1}{\varrho}\,J_1(\xi_k\,\varrho) - J_1(\xi_k)\right]J_1(\xi_k)}{\xi_k^2\,[J_0^2(\xi_k) + J_1^2(\xi_k)]}\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t},\\ \sigma_t(\varrho,t) &= -2\,E\,\alpha_t\,\vartheta_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[J_0(\xi_k\,\varrho) - \frac{1}{\xi_k}\left(\frac{1}{\varrho}\,J_1(\xi_k\,\varrho) + J_1(\xi_k)\right)\right]J_1(\xi_k)\cdot}{\xi_k\,[J_0^2(\xi_k) + J_1^2(\xi_k)]}\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t}.\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Die Reihenentwicklungen (47) und (51) wurden für eine Stahlplatte vom Halbmesser $R = 50$ cm und der Dicke $h = 5$ cm mit den Materialwerten $c_v \approx c_p \approx c = 0{,}11$ cal/g °C, $\lambda = 0{,}111$ cal/cmsek °C, $\gamma = 7{,}85$ g/cm³, $\alpha_{\text{Stahl-Luft}} = 20$ kcal/m² h °C $= 0{,}556 \cdot 10^{-3}$ cal/cm² sek °C zu verschiedenen Zeiten t ausgewertet. Es ergaben sich die in Abb. 4, 5 und 6 dargestellten Kurven. Man erkennt, daß die in Plattenmitte auftretenden extremalen Radialspannungen bzw. die am Plattenrande herrschenden größten Tangentialspannungen, von Null aus anwachsend, im Laufe der Zeit einen Extremwert erreichen, um hernach wieder langsam abzunehmen. Die Extremwerte werden für beide Spannungen nicht gleichzeitig erreicht, sondern z. B. für die größte Tangentialspannung $\sigma_t(1, t_{0\sigma_t}) = 0{,}0326\,E\,\alpha_t\,\vartheta_0$ zur Zeit $t_{0\sigma_t} \approx 1200$ sek $= 20$ min und für die extremale Radialspannung $\sigma_r(0, t_{0\sigma_r}) = -0{,}0122\,E\,\alpha_t\,\vartheta_0$ zur Zeit $t_{0\sigma_r} \approx 2100$ sec $= 35$ min.

2) *Näherungslösung.* Wir gehen wieder von (28a, b) aus, also mit $dV = 2\pi\,h\,r\,dr$, $\sigma = \sigma_r + \sigma_t$, $\bar{\sigma} = \sigma_r\,\sigma_t$ von

$$\Pi^* = \int_{r=0}^{R} r\,[(\sigma_r + \sigma_t)^2 - 2\,(1+\nu)\,\sigma_r\,\sigma_t + 2\,E\,\alpha_t\,\vartheta\,(\sigma_r + \sigma_t)\,dr = \text{Extr.}, \tag{52a}$$

[1] Der Ausgangszustand $\vartheta = \vartheta_0$ sei spannungslos.

an verschiedenen Stellen der Scheibe befriedigen, sowie durch eine genauere Beschreibung des Temperaturfeldes beheben.

c) Abkühlung einer dünnen Kreisscheibe. 1. *Exakte Lösung.* Ausgehend von der Differentialgleichung der Wärmeleitung für eine an ihren Oberflächen Wärme in ein Medium der Temperatur Null abgebenden dünne Platte[1] vom Halbmesser R und der Dicke h

$$\Delta\vartheta - b^2\,\vartheta = a^2\,\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\,, \qquad a^2 = \frac{c\,\gamma}{\lambda}\,, \qquad b^2 = \frac{2\,\alpha}{\lambda\,h} \tag{38}$$

erhält man für den rotationssymmetrischen Fall mit dem Produktansatz

$$\vartheta = f(r)\,e^{-\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 t} \tag{39}$$

aus (38) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{df}{dr} + \varkappa^2 f = 0\,, \qquad \omega^2 = \varkappa^2 + b^2\,, \tag{40}$$

deren Lösung mit Rücksicht darauf, daß in Plattenmitte die Temperatur endlich bleiben muß,

$$f = C\,J_0(\varkappa\,r) = C\,J_0(\xi\,\varrho)\,, \qquad \varrho = \frac{r}{R}\,, \qquad \xi = \varkappa\,R\,, \tag{41}$$

lautet. Der Wärmeübergang in ein Medium der Temperatur Null am Plattenrande $r = R$ fordert unter Heranziehung des *Newton*schen Abkühlungstheorems die Randbedingung

$$\vartheta(R,t) + \frac{\lambda}{\alpha}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\bigg|_{R,t} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad f(R) + \frac{\lambda}{\alpha}\,\frac{df}{dr}\bigg|_{R} = 0\,, \tag{42}$$

woraus mit (41) die Eigenwertgleichung

$$\xi\,J_1(\xi) = \frac{\alpha\,R}{\lambda}\,J_0(\xi) = N\,J_0(\xi) \tag{43}$$

hervorgeht. Ihre Lösungsschar $\xi_k(N)$ bestimmt nach (40) auch die Abklingungswerte $\omega = \omega_k$,

$$\omega_k^2 = \varkappa_k^2 + b^2 = b^2 + \frac{\xi_k^2}{R^2} = \frac{1}{R^2}\left[\xi_k^2 + 2\,\frac{R}{h}\,\frac{\alpha\,R}{\lambda}\right], \tag{44}$$

und es ist somit die Lösung (41) in der Form

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\,J_0(\xi_k\,\varrho)\,,$$

also entsprechend der ursprüngliche Ansatz (39) in der Form

$$\vartheta(\varrho,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\,J_0(\xi_k\,\varrho)\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t} \tag{45}$$

verallgemeinerungsfähig. Aus der Anfangsbedingung

$$\vartheta(\varrho,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\,J_0(\xi_k\,\varrho) = \vartheta_0$$

erhält man nun die C_k als Fourierkoeffizienten der Entwicklung der Funktion $\vartheta = \vartheta_0$ nach den Besselschen Funktionen $J_0(\xi_k\,\varrho)$ in der Gestalt

$$C_k = \vartheta_0\,\frac{\int_0^{\xi_k} z\,J_0(z)\,dz}{\int_0^{\xi_k} z\,J_0^2(z)\,dz} = \frac{2\,J_1(\xi_k)}{\xi_k\,[J_0^2(\xi_k) + J_1^2(\xi_k)]}\,, \tag{46}$$

so daß schließlich für das Temperaturfeld

$$\vartheta(\varrho,t) = 2\,\vartheta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_k)\,J_0(\xi_k\,\varrho)}{\xi_k\,[J_0^2(\xi_k) + J_1^2(\xi_k)]}\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t} \tag{47}$$

hervorgeht.

[1] *Melan* u. *Parkus*, Wärmespannungen stationärer Temperaturfelder, Wien 1953. Es bedeuten c die spez. Wärmemenge je Gewichtseinheit und λ bzw. α die Wärmeleit- bzw. Übergangszahl.

Zur Ermittlung der zugehörigen Wärmespannungen geht man von den Gleichgewichtsbedingungen des ebenen achsensymmetrischen Problems

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_r) - \sigma_t = 0 \tag{48}$$

und den thermisch-elastischen Spannungs-Dehnungsbeziehungen[1]

$$\varepsilon_r = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_t) + \alpha_t(\vartheta - \vartheta_0), \qquad \varepsilon_t = \frac{v}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\,\sigma_r) + \alpha_t(\vartheta - \vartheta_0), \tag{49a}$$

bzw.

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial r} + \nu\,\frac{v}{r} - (1+\nu)\,\alpha_t(\vartheta - \vartheta_0)\right], \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{v}{r} + \nu\,\frac{\partial v}{\partial r} - (1+\nu)\,\alpha_t(\vartheta - \vartheta_0)\right] \tag{49b}$$

aus, und erhält, indem man (49b) in (48) einsetzt, schließlich die Verschiebungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(r\,v)\right] = (1+\nu)\,\alpha_t\,\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \tag{50a}$$

mit der Lösung

$$v(r,t) = (1+\nu)\,\alpha_t\,\frac{1}{r}\int r\,\vartheta(r,t)\,dr + C_1(t)\,r + \frac{C_2(t)}{r}. \tag{50b}$$

Unter Beachtung von

$$\int r\,J_0(\xi_k\,\varrho)\,dr = \frac{R}{\xi_k}\,r\,J_1(\xi_k\,\varrho)$$

gewinnt man nun aus (50b), wenn man (47) einsetzt und die Integration hinsichtlich r ausführt, nachdem man noch die willkürliche Zeitfunktion $C_2(t)$ wegen $v(0,t) = 0$ gestrichen hat,

$$v(r,t) = C_1(t)\,r + 2\,(1+\nu)\,\alpha_t\,\vartheta_0\,R\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(\xi_k)\,J_1(\xi_k\,\varrho)}{\xi_k^2\,[J_0^2(\xi_k) + J_1^2(\xi_k)]}\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t}, \tag{50c}$$

so daß für die Radialspannungen nach (49b) schließlich

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu}\left[C_1(t) + \alpha_t\,\vartheta_0 - (1-\nu)\,\frac{\alpha_t}{r^2}\int r\,\vartheta\,dr\right]\\ &= \frac{E}{1-\nu}\left[C_1(t) + \alpha_t\,\vartheta_0 - 2\,(1-\nu)\,\frac{\alpha_t\,\vartheta_0\,R}{r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(\xi_k)\,J_1(\xi_k\,\varrho)}{\xi_k^2\,[J_0^2(\xi_k) + J_1^2(\xi_k)]}\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t}\right]\end{aligned} \tag{50d}$$

hervorgeht. Aus der Randbedingung $\sigma_r|_{R,t} = 0$ folgt nun $C_1(t)$, und man hat endgültig die Wärmespannungen

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r(\varrho,t) &= -2\,E\,\alpha_t\,\vartheta_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[\frac{1}{\varrho}\,J_1(\xi_k\,\varrho) - J_1(\xi_k)\right]J_1(\xi_k)}{\xi_k^2\,[J_0^2(\xi_k) + J_1^2(\xi_k)]}\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t},\\ \sigma_t(\varrho,t) &= -2\,E\,\alpha_t\,\vartheta_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[J_0(\xi_k\,\varrho) - \frac{1}{\xi_k}\left(\frac{1}{\varrho}\,J_1(\xi_k\,\varrho) + J_1(\xi_k)\right)\right]J_1(\xi_k)}{\xi_k\,[J_0^2(\xi_k) + J_1^2(\xi_k)]}\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t}.\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Die Reihenentwicklungen (47) und (51) wurden für eine Stahlplatte vom Halbmesser $R = 50$ cm und der Dicke $h = 5$ cm mit den Materialwerten $c_v \approx c_p \approx c = 0{,}11$ cal/g °C, $\lambda = 0{,}111$ cal/cmsek °C, $\gamma = 7{,}85$ g/cm³, $\alpha_{\text{Stahl-Luft}} = 20$ kcal/m² h °C $= 0{,}556 \cdot 10^{-3}$ cal/cm² sek °C zu verschiedenen Zeiten t ausgewertet. Es ergaben sich die in Abb. 4, 5 und 6 dargestellten Kurven. Man erkennt, daß die in Plattenmitte auftretenden extremalen Radialspannungen bzw. die am Plattenrande herrschenden größten Tangentialspannungen, von Null aus anwachsend, im Laufe der Zeit einen Extremwert erreichen, um hernach wieder langsam abzunehmen. Die Extremwerte werden für beide Spannungen nicht gleichzeitig erreicht, sondern z. B. für die größte Tangentialspannung $\sigma_t(1, t_{0\sigma_t}) = 0{,}0326\,E\,\alpha_t\,\vartheta_0$ zur Zeit $t_{0\sigma_t} \approx 1200$ sek $= 20$ min und für die extremale Radialspannung $\sigma_r(0, t_{0\sigma_r}) = -0{,}0122\,E\,\alpha_t\,\vartheta_0$ zur Zeit $t_{0\sigma_r} \approx 2100$ sec $= 35$ min.

2) *Näherungslösung.* Wir gehen wieder von (28a, b) aus, also mit $dV = 2\,\pi\,h\,r\,dr$, $\sigma = \sigma_r + \sigma_t$, $\bar{\sigma} = \sigma_r\,\sigma_t$ von

$$\Pi^* = \int_{r=0}^{R} r\,[(\sigma_r + \sigma_t)^2 - 2\,(1+\nu)\,\sigma_r\,\sigma_t + 2\,E\,\alpha_t\,\vartheta\,(\sigma_r + \sigma_t)\,dr = \text{Extr.}, \tag{52a}$$

[1] Der Ausgangszustand $\vartheta = \vartheta_0$ sei spannungslos.

wobei als Nebenbedingungen die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_r) - \sigma_t = 0 \tag{52b}$$

sowie die Oberflächenbedingung

$$\sigma_r|_{R,\,t} = 0 \tag{52c}$$

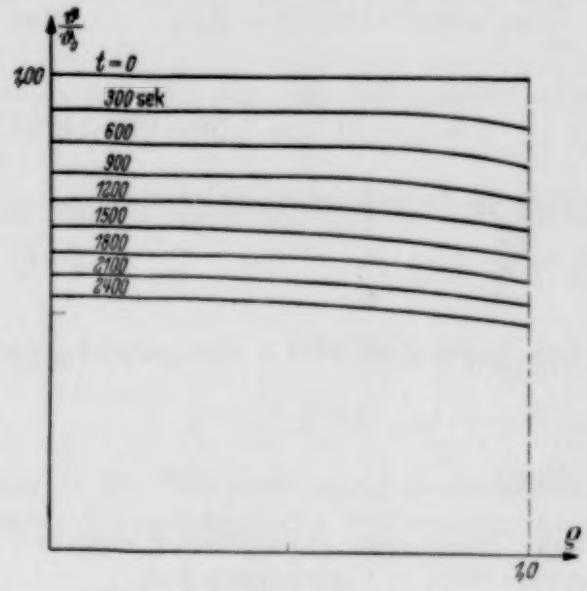
zu beachten sind, und da wir aus (52b, c) noch

$$\int_0^R r\,\sigma_r\,\sigma_t\,dr = \int_0^R r\,\sigma_r\,\frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_r)\,dr = \frac{1}{2}(r\,\sigma_r)^2\Big|_{r=0}^{R} = 0$$

folgern können, verbleibt schließlich als maßgebende Beziehung aus (52a)

$$\Pi^* = \int_{r=0}^{R} r\,[(\sigma_r + \sigma_t)^2 + 2\,E\,\alpha_t\,\vartheta\,(\sigma_r + \sigma_t)]\,dr = \text{Extr.} \tag{52d}$$

Zur Erzielung einer größeren Genauigkeit wollen wir von den Spannungsansätzen nicht nur die Erfüllung der Bedingungen (52b, c) fordern, sondern noch zu-



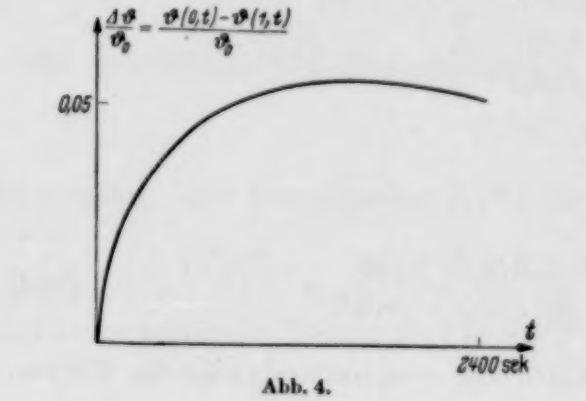


Abb. 4.

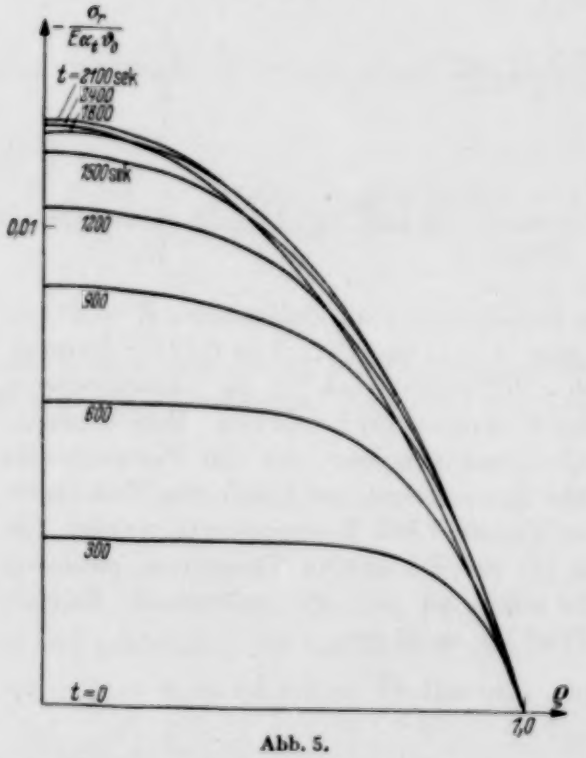


Abb. 5.

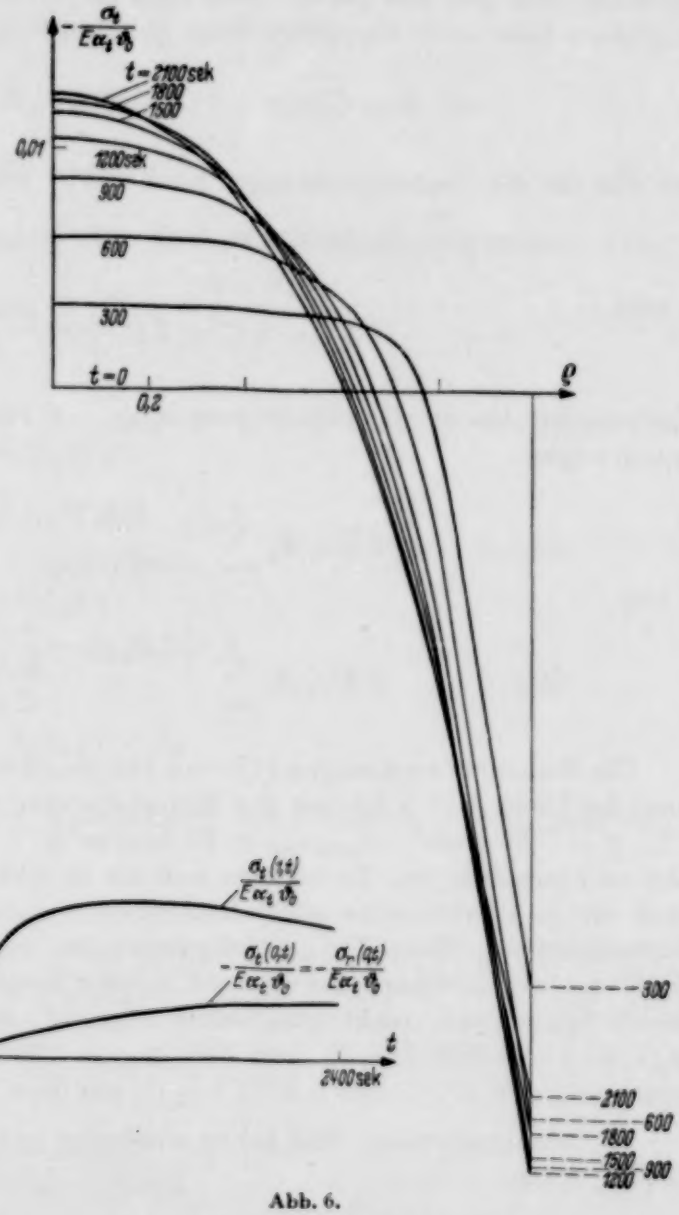


Abb. 6.

sätzlich die Erfüllung der Verträglichkeitsbedingung am Außenrande [in Plattenmitte ist sie mit einem die Gleichgewichtsbedingung (52b) befriedigenden Näherungsansatz von selbst

erfüllt]. Die Verträglichkeitsbedingung des ebenen rotationssymmetrischen Problems lautet bekanntlich

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,\varepsilon_t) - \varepsilon_r = 0\,,$$

woraus schließlich unter Beachtung des Hookeschen Gesetzes (49b) und mit (52b)

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_t) - \sigma_r + E\,\alpha_t\,r\,\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0 \tag{52e}$$

hervorgeht.

Während (52e) wegen (52b) für $r = 0$ stets erfüllt ist, ist dies für alle anderen Plattenpunkte zunächst nicht der Fall. Wir fordern daher von den Näherungsansätzen zusätzlich für den Außenrand $r = R$ die Erfüllung von (52e), also wegen $\sigma_r(R, t) = 0$

$$\sigma_t(R, t) + R\,\frac{\partial \sigma_t}{\partial r}\bigg|_{R,\,t} + E\,\alpha_t\,R\,\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\bigg|_{R,\,t} = 0\,,$$

bzw. mit

$$R\,\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\bigg|_{R,\,t} = -\,K(t) \tag{52f}$$

die Relation

$$\left[\sigma_t + \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varrho}\right]_{\varrho\,=\,1,\,t} = E\,\alpha_t\,K(t)\,. \tag{52g}$$

Für σ_r wird nun ein Näherungsansatz in der Form[1]

$$\sigma_r = c_0(t) + c_2(t)\,\varrho^2 + c_3(t)\,\varrho^3 \tag{53a}$$

benutzt, womit auf Grund der Nebenbedingung (52b) auch der Ansatz für σ_t feststeht:

$$\sigma_t = \frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_r) = \frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho\,\sigma_r) = c_0 + 3\,c_2\,\varrho^2 + 4\,c_3\,\varrho^3 \tag{53b}$$

bzw.

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial \varrho} = 6\,c_2\,\varrho + 12\,c_3\,\varrho^2 \tag{53c}$$

Von den hierin enthaltenen drei willkürlichen Koeffizienten c_0, c_2 und c_3 sind nun an Hand der beiden Nebenbedingungen (52c) und (52g) zwei in Abhängigkeit der dritten ausdrückbar. Einsetzen von (53a) bis (53c) in diese beiden Nebenbedingungen liefert das Gleichungssystem

$$c_2 + c_3 = -\,c_0\,, \qquad 9\,c_2 + 16\,c_3 = -\,c_0 + E\,\alpha_t\,K\,,$$

aus dem sich schließlich

$$c_2 = -\,\frac{15}{7}\,c_0 - \frac{1}{7}\,E\,\alpha_t\,K\,, \qquad c_3 = \frac{8}{7}\,c_0 + \frac{1}{7}\,E\,\alpha_t\,K \tag{54}$$

ergibt. Damit lauten also die Spannungsansätze

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r(\varrho, t) &= \frac{c_0(t)}{7}\,(7 - 15\,\varrho^2 + 8\,\varrho^3) - \frac{E\,\alpha_t}{7}\,K(t)\,(\varrho^2 - \varrho^3)\,,\\ \sigma_t(\varrho, t) &= \frac{c_0(t)}{7}\,(7 - 45\,\varrho^2 + 32\,\varrho^3) - \frac{E\,\alpha_t}{7}\,K(t)\,(3\,\varrho^2 - 4\,\varrho^3)\,,\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

und der hierin noch enthaltene Koeffizient $c_0(t)$ wird aus der Extremalbedingung $\partial \Pi^*/\partial c_0 = 0$ bestimmt. Man erhält schließlich aus

$$\int_{\varrho\,=\,0}^{1} \varrho\,(\sigma_r + \sigma_t)\,\frac{d(\sigma_r + \sigma_t)}{dc_0}\,d\varrho + E\,\alpha_t \int_{\varrho\,=\,0}^{1} \varrho\,\vartheta\,\frac{d(\sigma_r + \sigma_t)}{dc_0}\,d\varrho = 0$$

mit Verwendung von (55)

$$c_0(t) = \frac{5}{114}\,E\,\alpha_t\,K(t) - \frac{98}{114}\,E\,\alpha_t \int_0^1 (7\,\varrho - 30\,\varrho^3 + 20\,\varrho^4)\,\vartheta(\varrho, t)\,d\varrho\,. \tag{56}$$

---

[1] Der Ansatz einer linearen Funktion von ϱ kommt wegen der Rotationssymmetrie des Problems, die $\partial \sigma_r/\partial \varrho|_{\varrho\,=\,0} = 0$ bedingt, nicht in Frage.

Um zu einer einfachen Näherungslösung zu kommen, wird $\vartheta(\varrho, t)$ nicht in seiner exakten Form (47) eingesetzt, sondern auch für das Temperaturfeld selbst wieder ein Näherungsansatz verwendet. Wir setzen näherungsweise

$$\vartheta(\varrho, t) \approx A_0(t) + A_2(t)\,\varrho^2 + A_3(t)\,\varrho^3 \tag{57a}$$

und drücken die Koeffizienten A_0, A_2 und A_3 durch die Temperaturen $\vartheta_M(t)$ bzw. $\vartheta_R(t)$ in Plattenmitte bzw. am Rande sowie durch $K(t)$ aus. Man erhält aus den Bedingungen

$$\vartheta|_{\varrho=0,t} = \vartheta_M(t)\,, \qquad \vartheta|_{\varrho=1,t} = \vartheta_R(t)\,, \qquad R\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right|_{r=R,t} = \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=1,t} = -K(t)$$

schließlich

$$A_0 = \vartheta_M\,, \quad A_2 = -3(\vartheta_M - \vartheta_R) + K = -3\,\Delta\vartheta + K\,, \quad A_3 = 2\,\Delta\vartheta - K\,, \quad \Delta\vartheta = \vartheta_M - \vartheta_R\,,$$

und damit in erster Näherung für das Temperaturfeld

$$\vartheta(\varrho, t) \approx \vartheta_M(t) - \Delta\vartheta(t)\,[3\,\varrho^2 - 2\,\varrho^3] + K(t)\,[\varrho^2 - \varrho^3]\,. \tag{57b}$$

(Eine erste grobe Abschätzung, zu welchen Zeiten (57b) als Näherungslösung angesehen werden kann, wird durch die Aussage $\vartheta(\varrho, t) \leqq \vartheta_M(t)$ geliefert. Nachdem man für $\vartheta(\varrho, t)$ nach (57b) eine Extremalrechnung hinsichtlich ϱ durchgeführt hat, erhält man schließlich mit (58e) die Aussage

$$\vartheta_M \geqq \left(1 + \frac{N}{3}\right)\vartheta_R\,.$$

In unserem Falle ist $N = 0{,}25$, so daß sich die Abschätzung $\vartheta_M \geqq 1{,}08\,\vartheta_R$ ergibt. Aus der Lösung für das Temperaturfeld entnimmt man, daß dies ungefähr für $t = 900$ sec erfüllt ist. Die Näherungslösung für das Temperaturfeld stimmt sogar schon von $t = 600$ sec ab mit den exakten Werten nahezu überein). Einsetzen von (57b) in (56) liefert nach Integration

$$c_0(t) = -\frac{E\,\alpha_t}{20}\,[7\,\Delta\vartheta(t) - K(t)]\,, \tag{57c}$$

so daß schließlich für die Spannungen aus (55)

$$\sigma_r(\varrho, t) \approx -\frac{E\,\alpha_t}{20}\,\Delta\vartheta(t)\,[7 - 15\,\varrho^2 + 8\,\varrho^3] + \frac{E\,\alpha_t}{20}\,K(t)\,[1 - 5\,\varrho^2 + 4\,\varrho^3]\,, \tag{58a}$$

$$\sigma_t(\varrho, t) \approx -\frac{E\,\alpha_t}{20}\,\Delta\vartheta(t)\,[7 - 45\,\varrho^2 + 32\,\varrho^3] + \frac{E\,\alpha_t}{20}\,K(t)\,[1 - 15\,\varrho^2 + 16\,\varrho^3] \tag{58b}$$

hervorgeht. Für die Extremalspannungen[1] folgt damit

$$\min\sigma_r(t) = \sigma_r(0, t) = \sigma_t(0, t) = -\frac{E\,\alpha_t}{20}\,[7\,\Delta\vartheta(t) - K(t)]\,, \tag{58c}$$

$$\max\sigma_t(t) = \sigma_t(1, t) = \frac{E\,\alpha_t}{20}\,[6\,\Delta\vartheta(t) + 2\,K(t)]\,, \tag{58d}$$

wobei $K(0) = 0$ sowie für $K(t)$ im Sinne des *Newton*schen Abkühlungstheorems

$$K(t) = -\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=1,t} = \frac{\alpha R}{\lambda}\,\vartheta(1, t) = \frac{\alpha R}{\lambda}\,\vartheta_R(t) = N\,\vartheta_R(t) \qquad \text{für } t > 0 \tag{58e}$$

zu setzen ist.

Die Ausdrücke (58a, b) sind zum Vergleich mit den tatsächlichen Spannungswerten (51) in Abb. 7 aufgetragen worden. Während die Genauigkeit für $t = 300$ sec nicht mehr als befriedigend angesehen werden kann, was jedoch im Hinblick auf die Einfachheit der Näherungsansätze in Kauf genommen werden muß, erkennt man schon von $t = 900$ sec ab praktisch überhaupt keine Unterschiede mehr. Bis auf ein verhältnismäßig kleines Zeitintervall nach Beginn der Abkühlung gibt also die Näherungslösung den tatsächlichen Spannungszustand mit ausgezeichneter Genauigkeit wieder. Die (ebenfalls zur Zeit $t_{0\sigma_t} \approx 1200$ sec auftretenden) größten Tangentialspannungen ergeben sich mit

$$\frac{\Delta\vartheta\,(t_{0\sigma_t})}{\vartheta_0} = 0{,}054\,077\,, \qquad K(t_{0\sigma_t}) = N\,\vartheta_R(t_{0\sigma_t}) = 0{,}170\,416\,\vartheta_0$$

schließlich zu

$$\frac{\max\sigma_t}{E\,\alpha_t\,\vartheta_0} = \frac{1}{20}\,[6.0{,}054077 + 2.0{,}170416] = 0{,}033262\,,$$

während der Wert aus der genauen Lösung 0,0326 betrug.

[1] Wie Abb. 7 zeigt, nimmt das Extremum in Plattenmitte erst von $t \approx 900$ sec ab einen gegenüber dem im Plattenbereich bis dahin vorhandenen zweiten Extremum größeren Wert an.

Eine weitaus einfachere, wenn auch gröbere Näherung, die aber trotzdem die richtige Größenordnung der entstehenden Wärmespannungen abzuschätzen erlaubt, gewinnt man, wenn man in (52d) die einfachsten Ansätze

$$\sigma_r = c_0(t)\,[1 - \varrho^2]\,,$$

$$\sigma_t = \frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho\,\sigma_r) = c_0(t)\,[1 - 3\,\varrho^2]\,,$$

$$\vartheta(\varrho, t) = \vartheta_M(t) - \Delta\vartheta(t)\,\varrho^2$$

einführt. Man erhält schließlich aus $\partial \Pi^*/\partial c_0 = 0$

$$c_0(t) = -\frac{E\,\alpha_t}{4}\,\Delta\vartheta(t)$$

und damit

$$\sigma_r(\varrho, t) \approx -\frac{E\,\alpha_t}{4}\,\Delta\vartheta(t)\,[1 - \varrho^2]\,,$$

$$\sigma_t(\varrho, t) \approx -\frac{E\,\alpha_t}{4}\,\Delta\vartheta(t)\,[1 - 3\,\varrho^2]$$

mit den Extremalspannungen

$$\min \sigma_r = \sigma_r(0, t) = \min \sigma_t$$
$$= \sigma_t(0, t) = -\frac{1}{4}\,E\,\alpha_t\,\Delta\vartheta(t)\,,$$

$$\max \sigma_t = \sigma_t(1, t) = \frac{1}{2}\,E\,\alpha_t\,\Delta\vartheta(t)\,.$$

Diese sind, im Gegensatz zu (58c, d), allein von der Temperaturdifferenz abhängig, so daß mit dieser Näherung die extremalen Spannungen zu demjenigen Zeitpunkt t_0 berechnet werden, zu dem $\Delta\vartheta(t)$ ein Maximum wird. Um ohne eine Auswertung der Reihenentwicklung für das Temperaturfeld zur extremalen Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta = \vartheta_M - \vartheta_R$ zu kommen, betrachten wir anstelle der alternierenden Reihe

$$\frac{\Delta\vartheta(t)}{\vartheta_0} = \frac{\vartheta(0, t) - \vartheta(1, t)}{\vartheta_0}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,[1 - J_0(\xi_k)]\,J_1(\xi_k)}{\xi_k\,[J_0^2(\xi_k) + J_1^2(\xi_k)]}\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\,A_k\,e^{-\left(\frac{\omega_k}{a}\right)^2 t}$$

als Näherungslösung nur ihre beiden ersten Glieder

$$\frac{\Delta\vartheta(t)}{\vartheta_0} = A_1\,e^{-\left(\frac{\omega_1}{a}\right)^2 t} - A_2\,e^{-\left(\frac{\omega_2}{a}\right)^2 t}\,,$$

wobei für den hiermit begangenen Fehler $R(t)$

$$|R(t)| \leqq A_3\,e^{-\left(\frac{\omega_3}{a}\right)^2 t}$$

gilt. Aus einer Extremalrechnung für den Näherungsansatz erhält man schließlich, daß zur Zeit

$$t_0 = \frac{a^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\ln\left[\frac{A_2}{A_1}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\right]$$

für die extremale Temperaturdifferenz

$$\frac{\max \Delta\vartheta}{\vartheta_0} = A_1\left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2\right]\left[\frac{A_1}{A_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2\right]^{\frac{(\omega_1/\omega_2)^2}{1-(\omega_1/\omega_2)^2}}$$

hervorgeht.

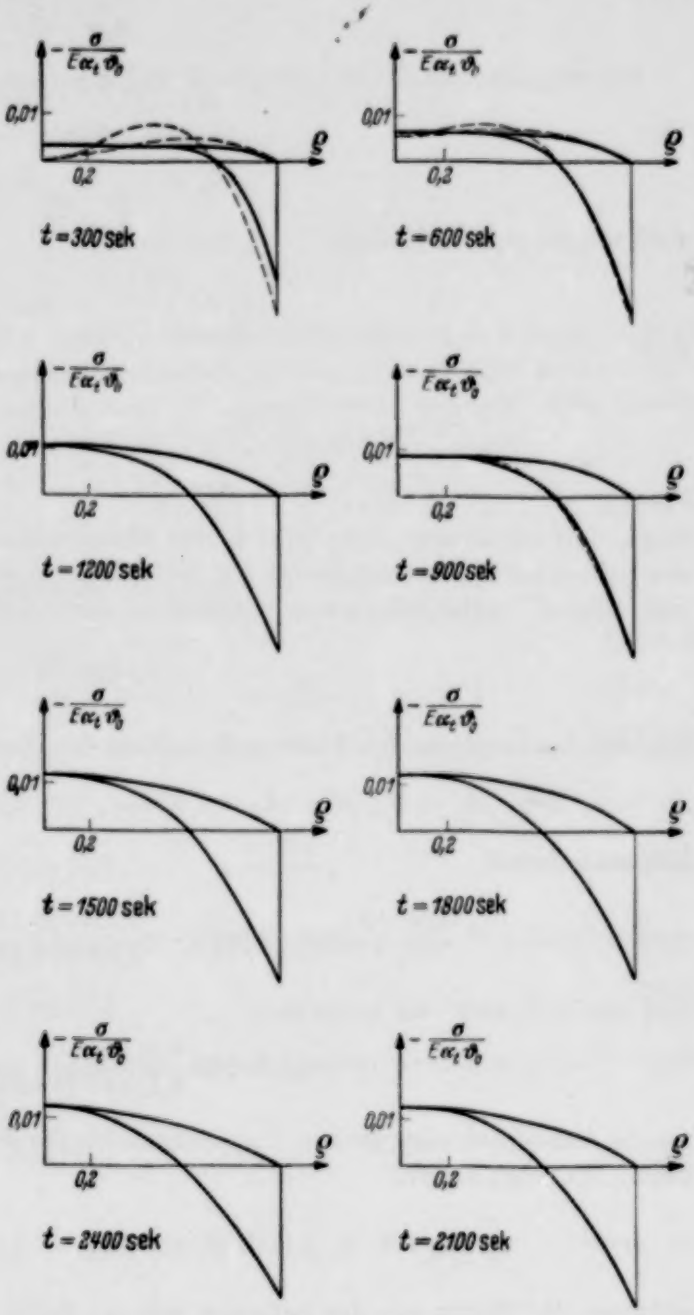


Abb. 7. Darstellung von $\frac{\sigma_r}{E\,\alpha_t\,\vartheta_0}$ und $\frac{\sigma_t}{E\,\alpha_t\,\vartheta}$ (Näherungslösung gestrichelt).

Um den hierin enthaltenen Fehler abschätzen zu können, berechnen wir uns eine Zeit $\bar{t}_0(\mu)$ aus der Relation

$$\frac{A_3\, e^{-\left(\frac{\omega_3}{a}\right)^2 \bar{t}_0}}{A_1\, e^{-\left(\frac{\omega_1}{a}\right)^2 \bar{t}_0} - A_2\, e^{-\left(\frac{\omega_2}{a}\right)^2 \bar{t}_0}} = \frac{\mu}{100}$$

zu

$$\bar{t}_0 = \frac{a^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \ln\left[\frac{100}{\mu}\frac{A_3}{A_1} + \frac{A_2}{A_1}\right]$$

und wegen $\omega_3 > \omega_2$, also

$$A_3\, e^{-\left(\frac{\omega_2}{a}\right)^2 \bar{t}_0} > A_3\, e^{-\left(\frac{\omega_3}{a}\right)^2 \bar{t}_0} \geqq |R(\bar{t}_0)|\,,$$

d. h.

$$\frac{|R(\bar{t}_0)|}{A_1\, e^{-\left(\frac{\omega_1}{a}\right)^2 \bar{t}_0} - A_2\, e^{-\left(\frac{\omega_2}{a}\right)^2 \bar{t}_0}} < \frac{A_3\, e^{-\left(\frac{\omega_3}{a}\right)^2 \bar{t}_0}}{A_1\, e^{-\left(\frac{\omega_1}{a}\right)^2 \bar{t}_0} - A_2\, e^{-\left(\frac{\omega_2}{a}\right)^2 \bar{t}_0}} = \frac{\mu}{100}$$

folgt, daß zu diesem Zeitpunkt $\bar{t}_0$ das vernachlässigte Restglied $R(\bar{t}_0)$ kleiner als $\mu\,\%$ der Summe der beiden ersten Reihenglieder ist. Setzt man also $\bar{t}_0 = t_0$, so folgt für die Prozentzahl μ des Fehlers, mit dem die näherungsweise berechnete extremale Temperaturdifferenz behaftet sein kann,

$$\mu = 100\,\frac{A_3}{A_2}\,\frac{1}{(\omega_2/\omega_1)^2 - 1}\,.$$

Mit den im vorliegenden Falle sich ergebenden Zahlenwerten

$$A_1 = 0{,}1206,\quad A_2 = 0{,}1143,\quad A_3 = 0{,}02346,\quad (\omega_1/a)^2 = 0{,}279\cdot 10^{-3}\,\mathrm{sec}^{-1},\quad (\omega_2/a)^2 = 1{,}029\cdot 10^{-3}\,\mathrm{sec}^{-1}$$

hat man damit

$$\frac{\max \Delta\vartheta}{\vartheta_0} = 0{,}1206\left[1 - \frac{0{,}279}{1{,}029}\right]\left[\frac{0{,}1206}{0{,}1143}\,\frac{0{,}279}{1{,}029}\right]^{\frac{0{,}279/1{,}029}{1-(0{,}279/1{,}029)}} = 0{,}0553$$

mit einem Fehler von höchstens

$$\mu = 100\,\frac{0{,}02346}{0{,}1143}\,\frac{1}{(1{,}029/0{,}279) - 1} = 7{,}6\%\,,$$

was in Anbetracht der groben Approximation für die Spannungen als ausreichend angesehen werden kann. Es folgt somit

$$\frac{\min \sigma_r}{E\,\alpha_t\,\vartheta_0} \approx -\frac{1}{4}\,0{,}0553 = -\,0{,}01383\,,\qquad \frac{\max \sigma_t}{E\,\alpha_t\,\vartheta_0} \approx \frac{0{,}0553}{2} = 0{,}02765\,,$$

während die Werte aus der genauen Lösung 0,012 2 bzw. 0,032 6 betragen. Es sei noch vermerkt, daß auch diese grobe Näherung für große Zeiten t die tatsächlichen Werte sehr gut wiedergibt.

d) Näherungslösung für die Wärmespannungen in einem Hohlzylinder mit freien Enden. Wir betrachten einen Hohlzylinder der Länge l mit dem Innenhalbmesser r_i und dem Außenhalbmesser r_a, dessen Temperaturfeld $\vartheta(r, t)$ speziell von der Zylinderachsenrichtung z unabhängig sein möge, was z. B. bei an den Zylinderenden isolierten Rohren mit von z unabhängigen thermischen Einwirkungen auf den Mantelflächen der Fall ist. In erster Näherung identifizieren wir den entstehenden Spannungszustand mit denjenigen Spannungen $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_t^{(1)}$ und $\sigma_z^{(1)}$, die sich infolge des Temperaturfeldes ϑ im mittleren Bereich eines unendlich langen Rohres mit freien Zylinderenden ergeben, und für die

$$\sigma_r^{(1)}(r,t) = -\frac{E\,\alpha_t}{1-\nu}\,\frac{1}{r_a^2 - r_i^2}\left\{\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 - 1\right]\int_{r_i}^{r} r\,\vartheta\,dr - \left[1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]\int_{r}^{r_a} r\,\vartheta\,dr\right\}, \tag{59a}$$

$$\sigma_t^{(1)}(r,t) = -\frac{E\,\alpha_t}{1-\nu}\left\{\vartheta - \frac{1}{r_a^2 - r_i^2}\left(\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 + 1\right]\int_{r_i}^{r} r\,\vartheta\,dr + \left[1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]\int_{r}^{r_a} r\,\vartheta\,dr\right)\right\}, \tag{59b}$$

$$\sigma_z^{(1)}(r,t) = \sigma_r^{(1)} + \sigma_t^{(1)} = -\frac{E\,\alpha_t}{1-\nu}\left[\vartheta - \frac{2}{r_a^2 - r_i^2}\int_{r_i}^{r_a} r\,\vartheta\,dr\right] \tag{59c}$$

folgt[1], wobei insbesondere wegen der radialen Gleichgewichtsbedingung des ebenen achsensymmetrischen Spannungszustandes

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_r^{(1)}) = \sigma_t^{(1)} \tag{60a}$$

und mit Heranziehung der partiellen Integrationsregel bei Beachtung der Randbedingungen

$$\sigma_r^{(1)}(r_i, t) = 0, \qquad \sigma_r^{(1)}(r_a, t) = 0 \tag{60b}$$

die Beziehungen

$$\int_{r_i}^{r} r\,\sigma_z^{(1)}\,dr = \int r\,\sigma_z^{(1)}\,dr = r^2\,\sigma_r^{(1)}(r, t)\,, \qquad \int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_z^{(1)}\,dr = 0\,, \qquad \int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_r^{(1)}\,\sigma_t^{(1)}\,dr = 0 \tag{60c}$$

gelten.

Für ein endlich langes Rohr werden mit (59c) jedoch die Randbedingungen $\sigma_z = 0$ für $z = \pm\, l/2$ nicht erfüllt, und es muß daher, um die Randspannungsfreiheit an den Stirnflächen herzustellen, ein zusätzlicher achsensymmetrischer Spannungszustand *2* herangezogen werden. Die Gleichgewichtsbedingungen für seine Spannungskomponenten $\sigma_r^{(2)}$, $\sigma_t^{(2)}$, $\sigma_z^{(2)}$ und $\tau_{rz}^{(2)}$ lauten

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_r^{(2)}) - \sigma_t^{(2)} + \frac{\partial}{\partial z}(r\,\tau_{rz}^{(2)}) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial z}(r\,\sigma_z^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial r}(r\,\tau_{rz}^{(2)}) = 0\,, \tag{61a, b}$$

und diese haben nun folgenden Randbedingungen zu genügen:

$$\sigma_z^{(2)}|_{r,\,z\,=\,\pm\,l/2,\,t} = -\,\sigma_z^{(1)}(r, t)\,, \tag{62a, b}$$

$$\tau_{rz}^{(2)}|_{r,\,z\,=\,\pm\,l/2,\,t} = 0\,, \qquad \tau_{rz}^{(2)}|_{r\,=\,r_i,\,z,\,t} = 0\,, \qquad \tau_{rz}^{(2)}|_{r\,=\,r_a,\,z,\,t} = 0\,, \tag{63a—d}$$

$$\sigma_r^{(2)}|_{r\,=\,r_i,\,z,\,t} = 0\,, \qquad \sigma_r^{(2)}|_{r\,=\,r_a,\,z,\,t} = 0\,. \tag{64a, b}$$

Wir verwenden für $\sigma_z^{(2)}$ den Ansatz

$$\sigma_z^{(2)}(r, z, t) = -\,\sigma_z^{(1)}(r, t)\,f(\zeta)\,, \qquad \zeta = \frac{2\,z}{l}\,, \tag{65a}$$

wobei $f(\zeta)$ mit Rücksicht auf (62a, b) eine zunächst willkürliche, jedoch den Randbedingungen

$$f(\pm\,1) = 1 \tag{65b}$$

genügende Funktion bedeutet. Damit hat man aus der Gleichgewichtsbedingung (61b) unter Beachtung von (60c) für die Schubspannungen

$$\tau_{rz}^{(2)} = \frac{2}{l\,r}\left(\int r\,\sigma_z^{(1)}\,dr\right) f'(\zeta) + \frac{A(\zeta, t)}{r} = 2\,\frac{r}{l}\,\sigma_r^{(1)}\,f'(\zeta) + \frac{A(\zeta, t)}{r}\,. \tag{66a}$$

Den Randbedingungen (63c, d) kann mit (66a) wegen (60b) durch $A = 0$ genügt werden, und damit verbleibt also

$$\tau_{rz}^{(2)} = 2\,\frac{r}{l}\,\sigma_r^{(1)}\,f'(\zeta)\,, \tag{66b}$$

wobei mit Rücksicht auf die Randbedingungen (63a, b) für f weiterhin die Randbedingungen

$$f'(\pm\,1) = 0 \tag{66c}$$

zu fordern sind. Aus der Gleichgewichtsbedingung (61a) folgt, nachdem man auch für $\sigma_r^{(2)}$ mit einer zunächst willkürlichen Funktion $g(\zeta)$ einen (die Randbedingungen (64a, b) befriedigenden) Produktansatz in der Form

$$\sigma_r^{(2)} = \sigma_r^{(1)}\,g(\zeta) \tag{67}$$

benutzt, für die Ringspannungen

$$\sigma_t^{(2)} = \frac{\partial}{\partial r}(r\,\sigma_r^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial z}(r\,\tau_{rz}^{(2)}) \tag{68a}$$

mit Beachtung von (60a) und (66b) schließlich

$$\sigma_t^{(2)} = \sigma_t^{(1)}\,g(\zeta) + 4\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sigma_r^{(1)}\,f''(\zeta)\,. \tag{68b}$$

[1] S. z. B. *R. Trostel*, Ing.-Arch. 24 (1956) S. 1.

Die endgültigen Spannungen sind damit

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(2)} = \sigma_r^{(1)}\,[1 + g(\zeta)]\,,\\
\sigma_t &= \sigma_t^{(1)} + \sigma_t^{(2)} = \sigma_t^{(1)}\,[1 + g(\zeta)] + 4\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sigma_r^{(1)} f''(\zeta)\,,\\
\sigma_z &= \sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)} = \sigma_z^{(1)}\,[1 - f(\zeta)]\,,\\
\tau_{rz} &= \tau_{rz}^{(2)} = 2\left(\frac{r}{l}\right)\sigma_r^{(1)} f'(\zeta)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Sie beschreiben einen, den Gleichgewichtsbedingungen und sämtlichen Oberflächenbedingungen genügenden Spannungszustand. Einsetzen in (28a) liefert mit

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_t + \sigma_z = \sigma_z^{(1)}\,[2 + g - f] + 4\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sigma_r^{(1)} f''\,,$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma} = \sigma_r\,\sigma_t + \sigma_t\,\sigma_z + \sigma_z\,\sigma_r - \tau_{rz}^2 &= \sigma_z^{(1)\,2}\,(1 - f)\,(1 + g) + \sigma_r^{(1)}\,\sigma_t^{(1)}\,(1 + g)^2\\
&+ 4\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sigma_r^{(1)}\,\sigma_z^{(1)} f''(1 - f) + 4\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sigma_r^{(1)\,2}\,[f''(1 + g) - f'^2]\,,
\end{aligned}$$

wenn wir zunächst die Integration über r ausführen, was auf Grund der bekannten Funktionen $\sigma_r^{(1)}$, $\sigma_t^{(1)}$ und $\sigma_z^{(1)}$ ohne weiteres möglich ist, ein nur noch die Integrationsvariable ζ enthaltendes Variationsproblem von der Form

$$J[f(\zeta), g(\zeta)] = \int_{-1}^{+1} F[g(\zeta), f(\zeta), f'(\zeta), f''(\zeta)]\,d\zeta = \text{Extr.} \tag{70a}$$

Hierbei ist (mit Herauskürzen des gemeinsamen Faktors $\pi\,l/2\,E$)

$$\begin{aligned}
F = 2\,a_1 f''^2 - a_2\,[f''(1 + g) - f'^2] - a_3 f'' + a_4\,[(2 + g - f)^2 - 2\,(1 + \nu)\,(1 - f)\,(1 + g)]\\
- 2\,(2 + g - f)\,a_5\,,
\end{aligned} \tag{70b}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\bar{a}_1}{l^4} = 8\int_{r_i}^{r_a}\left(\frac{r}{l}\right)^4 r\,\sigma_r^{(1)\,2}\,dr\,, & a_2 &= \frac{\bar{a}_2}{l^2} = 8\,(1 + \nu)\int_{r_i}^{r_a}\left(\frac{r}{l}\right)^2 r\,\sigma_r^{(1)\,2}\,dr\,,\\
a_3 &= -\,8\,E\,\alpha_t\int_{r_i}^{r_a}\left(\frac{r}{l}\right)^2 r\,\sigma_r^{(1)}\vartheta\,dr = \frac{\bar{a}_3}{l^2}\,, & a_4 &= \int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_z^{(1)\,2}\,dr\,, \quad a_5 = -\,E\,\alpha_t\int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_z^{(1)}\,\vartheta\,dr
\end{aligned}\right\} \tag{70c}$$

bedeuten und insbesondere mit (59c)

$$a_4 = \left(\frac{E\,\alpha_t}{1 - \nu}\right)^2\left[\int_{r_i}^{r_a} r\,\vartheta^2\,dr - \frac{2}{r_a^2 - r_i^2}\left(\int_{r_i}^{r_a} r\,\vartheta\,dr\right)^2\right] = \frac{a_5}{1 - \nu} \tag{70d}$$

folgt.

Durch Nullsetzen der Variationsableitung von (70a) erhalten wir die *Euler*schen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial g} = 0\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{d\zeta}\,\frac{\partial F}{\partial f'} + \frac{d^2}{d\zeta^2}\,\frac{\partial F}{\partial f''} = 0\,. \tag{71a, b}$$

Zunächst folgt aus der ersten Gleichung (71a) mit F nach (70b)

$$g = \frac{a_5}{a_4} - (1 - \nu) + \frac{a_2}{2\,a_4} f'' - \nu f = \frac{a_2}{2\,a_4} f'' - \nu f\,. \tag{72}$$

Weiterhin ist mit Beachtung von (72)

$$\frac{\partial F}{\partial f} = 2\,(1 + \nu)\,a_5 + 2\,a_4\,(1 - \nu^2)\,(f - 1) + \nu\,a_2 f''' = 2\,a_4\,(1 - \nu^2)\,f + \nu\,a_2 f''\,, \tag{73a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial f'} = 2\,a_2 f'\,, \qquad \frac{d}{d\zeta}\,\frac{\partial F}{\partial f'} = 2\,a_2 f''\,, \tag{73b}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial f''} &= f''\left(4\,a_1 - \frac{a_2^2}{2\,a_4}\right) - \frac{a_2\,a_5}{a_4} - a_3 + \nu\,a_2\,(f - 1)\,,\\
\frac{d^2}{d\zeta^2}\,\frac{\partial F}{\partial f''} &= f''''\left(4\,a_1 - \frac{a_2^2}{2\,a_4}\right) + \nu\,a_2 f''\,,
\end{aligned}\right\} \tag{73c}$$

so daß damit aus der zweiten *Euler*schen Gleichung (71b)

$$f''''\left(4\,a_1 - \frac{a_2^2}{2\,a_4}\right) - 2\,(1-\nu)\,a_2 f'' + 2\,a_4\,(1-\nu^2)\,f = -2\,[(1+\nu)\,a_5 - (1-\nu^2)\,a_4] = 0 \qquad (74a)$$

hervorgeht. Mit den Koeffizienten

$$c_1^2 = \frac{2\,(1-\nu)\,a_2\,a_4}{8\,a_1\,a_4 - a_2^2}\,, \qquad c_2^4 = \frac{4\,(1-\nu^2)\,a_4^2}{8\,a_1\,a_4 - a_2^2} \qquad (74b)$$

läßt sich (74a) auf die einfache Form

$$f'''' - 2\,c_1^2 f'' + c_2^4 f = 0\,. \qquad (74c)$$

bringen. [c_1^2 bzw. c_2^4 sind stets positiv, denn es sind nach (70c) $a_2 > 0$ sowie $a_4 > 0$. Zum Nachweis, daß der Nenner der Koeffizienten positiv ist, benutzen wir die Schwarzsche Ungleichung. Man erhält schließlich mit Beachtung von (59c) und (60c)

$$\begin{aligned} 8\,a_1\,a_4 - a_2^2 &\geqq 64 \int_{r_i}^{r_a} \left(\frac{r}{l}\right)^4 r\,\sigma_r^{(1)'}\,dr \left(\int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_z^{(1)'}\,dr - (1+\nu)^2 \int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_r^{(1)'}\,dr\right) \\ &= 64 \int_{r_i}^{r_a} \left(\frac{r}{l}\right)^4 r\,\sigma_r^{(1)'}\,dr \left(\int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_i^{(1)'}\,dr - \nu\,(2+\nu) \int_{r_i}^{r_a} r\,\sigma_r^{(1)'}\,dr\right) > 0\,, \end{aligned}$$

da $\sigma_i^{(1)'}$ bis auf einen kleinen Bereich, in dem das Vorzeichen von $\sigma_i^{(1)}$ wechselt, erheblich größer als $\sigma_r^{(1)'}$ ist]. Der Ansatz

$$f = C\,e^{\lambda\zeta} \qquad (75a)$$

liefert nach Einsetzen in (74c) eine biquadratische Gleichung für die charakteristischen Exponenten, aus der man schließlich

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\,(\varkappa_1 \pm i\,\varkappa_2) \qquad (75b)$$

erhält, wobei

$$\varkappa_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{c_2^2 + c_1^2}\,, \qquad \varkappa_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{c_2^2 - c_1^2} \qquad (75c)$$

ist. Hierbei wurde $c_2^4 \geqq c_1^4$ vorausgesetzt. Im Falle $c_1^4 \geqq c_2^4$ sind sämtliche Wurzeln reell:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{c_1^2 \pm \sqrt{c_1^4 - c_2^4}} = \begin{cases} \pm\sqrt{c_1^2 + \sqrt{c_1^4 - c_2^4}} = \pm\,\mu_1\,, \\ \pm\sqrt{c_1^2 - \sqrt{c_1^4 - c_2^4}} = \pm\,\mu_2\,. \end{cases} \qquad (75d)$$

Dementsprechend lautet die allgemeine Lösung für $c_1^4 \leqq c_2^4$ mit den Integrationskonstanten A_1, A_2, B_1 und B_2

$$f(\zeta) = e^{\varkappa_1\zeta}\,(A_1 \cos \varkappa_2\zeta + A_2 \sin \varkappa_2\zeta) + e^{-\varkappa_1\zeta}\,(B_1 \cos \varkappa_2\zeta + B_2 \sin \varkappa_2\zeta)\,, \qquad (76a)$$

während im Falle $c_1^4 \geqq c_2^4$

$$f(\zeta) = A_1\,e^{\mu_1\zeta} + A_2\,e^{-\mu_1\zeta} + A_3\,e^{\mu_2\zeta} + A_4\,e^{-\mu_2\zeta} \qquad (76b)$$

hervorgeht. Mit Rücksicht auf die Symmetrie des Problems zur Ebene $z = 0$ verbleiben allein die in ζ symmetrischen Lösungsanteile, also

für $c_1^4 \leqq c_2^4$: $$f(\zeta) = A_1\,\mathfrak{Cof}\,\varkappa_1\zeta \cos \varkappa_2\zeta + A_2\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa_1\zeta \sin \varkappa_2\zeta\,, \qquad (77a)$$

für $c_1^4 \geqq c_2^4$: $$f(\zeta) = A_1\,\mathfrak{Cof}\,\mu_1\zeta + A_2\,\mathfrak{Cof}\,\mu_2\zeta\,. \qquad (77b)$$

Nach Bestimmung der Konstanten aus den Randbedingungen (65b) und (66c) hat man dann schließlich

für $c_1^4 \leqq c_2^4$:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\varkappa_1\,\mathfrak{Cof}\,\varkappa_1 \sin \varkappa_2 + \varkappa_2\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa_1 \cos \varkappa_2}{\varkappa_1 \sin \varkappa_2 \cos \varkappa_2 + \varkappa_2\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa_1\,\mathfrak{Cof}\,\varkappa_1}\,, & (77c) \\ A_2 = \dfrac{\varkappa_2\,\mathfrak{Cof}\,\varkappa_1 \sin \varkappa_2 - \varkappa_1\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa_1 \cos \varkappa_2}{\varkappa_1 \sin \varkappa_2 \cos \varkappa_2 + \varkappa_2\,\mathfrak{Sin}\,\varkappa_1\,\mathfrak{Cof}\,\varkappa_1}\,, & (77d) \end{cases}$$

für $c_1^4 \geqq c_2^4$:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\mu_2\,\mathfrak{Sin}\,\mu_2}{\mu_2\,\mathfrak{Sin}\,\mu_2\,\mathfrak{Cof}\,\mu_1 - \mu_1\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\,\mathfrak{Cof}\,\mu_2}\,, & (77e) \\ A_2 = -\dfrac{\mu_1\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1}{\mu_2\,\mathfrak{Sin}\,\mu_2\,\mathfrak{Cof}\,\mu_1 - \mu_1\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\,\mathfrak{Cof}\,\mu_2}\,. & (77f) \end{cases}$$

Berechnen wir nun noch aus (72)

$$g(\zeta) = \frac{a_2}{2\,a_4} f'' - \nu f, \tag{77g}$$

so ist damit der Zusatz-Spannungszustand vollständig ermittelt. Selbstverständlich sind in dieser Lösung sämtliche Grenzfälle enthalten:

α) Die dünne Kreisringscheibe. Aus (74b) und (70c) ersehen wir, daß wir die Koeffizienten c_1^2 bzw. c_2^4 auf die Form

$$c_1^2 = \frac{2\,(1-\nu)\,\bar{a}_2\,a_4}{8\,\bar{a}_1\,a_4 - \bar{a}_2^2}\,l^2 = \bar{c}_1^2\,l^2\,, \qquad c_2^4 = \frac{4\,(1-\nu^2)\,a_4^2}{8\,\bar{a}_1\,a_4 - \bar{a}_2^2}\,l^4 = \bar{c}_2^4\,l^4$$

bringen können. Damit werden für $\bar{c}_1^4 \leqq \bar{c}_2^4$

$$\varkappa_1 = \frac{l}{\sqrt{2}}\sqrt{\bar{c}_2^2 + \bar{c}_1^2} = l\,\bar{\varkappa}_1\,, \qquad \varkappa_2 = \frac{l}{\sqrt{2}}\sqrt{\bar{c}_2^2 - \bar{c}_1^2} = l\,\bar{\varkappa}_2$$

und entsprechend für $\bar{c}_1^4 \geqq \bar{c}_2^4$

$$\mu_1 = l\,\bar{\mu}_1\,, \qquad \mu_2 = l\,\bar{\mu}_2\,,$$

wobei die $\bar{\mu}_1$ und $\bar{\mu}_2$ nun in entsprechender Weise nur noch die quergestrichenen, von l unabhängigen Konstanten $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ enthalten. Für $l \to 0$ erhalten wir nun mit $\sin \varkappa_2 \approx \varkappa_2$, $\cos \varkappa_2 \approx 1$ und $\mathfrak{Sin}\,\varkappa_1 \approx \varkappa_1$, $\mathfrak{Cof}\,\varkappa_1 \approx 1$ aus[1] (77c, d) $A_1 = 1$, $A_2 = 0$ und damit aus (77a) mit $\mathfrak{Cof}\,\varkappa_1\zeta \approx \cos \varkappa_2 \zeta = 1$ schließlich $f(\zeta) = 1$ und aus (77g) $g(\zeta) = -\nu$. Die Spannungen sind damit nach (69)

$$\sigma_z = 0\,, \qquad \tau_{rz} = 0\,, \qquad \sigma_r = \sigma_r^{(1)}\,(1-\nu)\,, \qquad \sigma_t = \sigma_t^{(1)}\,(1-\nu)\,.$$

Axial- und Schubspannungen verschwinden, und die Radial- und Ringspannungen nehmen die Werte des ebenen Spannungszustandes an.

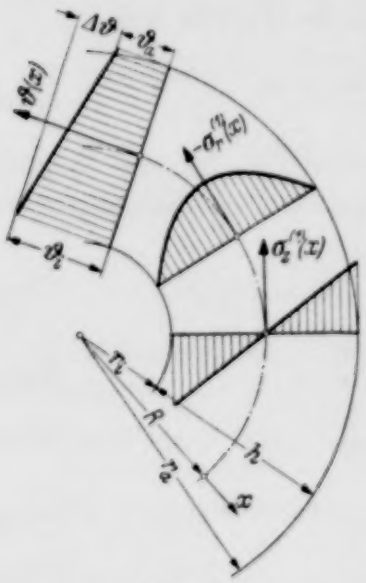


Abb. 8.

β) Das unendlich lange Rohr. Mit $l \to \infty$ streben die Werte $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ ebenfalls nach Unendlich. In (77c, d) können wir nun $\mathfrak{Sin}\,\varkappa_1 \approx \mathfrak{Cof}\,\varkappa_1 \approx e^{\varkappa_1}/2$ setzen und erhalten

$$A_1 = \lim_{\substack{\varkappa_1 \to \infty \\ \varkappa_2 \to \infty}} \frac{1}{2}\,\frac{e^{\varkappa_1}\,(\varkappa_1 \sin \varkappa_2 + \varkappa_2 \cos \varkappa_2)}{\varkappa_1 \sin \varkappa_2 \cos \varkappa_2 + \dfrac{\varkappa_2}{4}\,e^{2\varkappa_1}} = 0$$

und entsprechend $A_2 = 0$, so daß als Lösung $f(\zeta) = g(\zeta) = 0$ und somit für die endgültigen Spannungen nach[2] (69)

$$\sigma_r = \sigma_r^{(1)}\,, \qquad \sigma_t = \sigma_t^{(1)}\,, \qquad \sigma_z = \sigma_z^{(1)}\,, \qquad \tau_{rz} = 0$$

entsteht. Es ergibt sich also die Lösung des Ausgangszustandes.

γ) Dünne Rohre. Ist die Wandstärke $h = r_a - r_i$ klein gegenüber dem mittleren Rohrhalbmesser $R = (r_a + r_i)/2$ (Abb. 8), so liegt das Problem der Kreiszylinderschale vor. Wie man zeigen kann[3], streben z. B. im Falle einer Temperaturdifferenz zwischen Innen- und Außenmantelfläche die (näherungsweise nach einer quadratischen Parabel verteilten) Radialspannungen $\sigma_r^{(1)}$ mit h/R gegen Null, während die Axialspannungen $\sigma_z^{(1)}$ den Charakter von Biegespannungen annehmen. Setzen wir also mit[3] $\sigma_0 = E\,\alpha_t/(1-\nu)$ näherungsweise

$$\sigma_r^{(1)}(x) = -\frac{\sigma_0\,\Delta\vartheta\,h}{8\,R}\left[1 - \left(2\,\frac{x}{h}\right)^2\right], \qquad \sigma_z^{(1)}(x) = \sigma_0\,\Delta\vartheta\,\frac{x}{h}\,,$$

---

[1] Dasselbe folgt (da ja $c_1^4 = c_2^4 = 0$) auch aus (77b) mit (77e, f).
[2] Auch hier folgt dasselbe Resultat aus der für $c_1^4 \geqq c_2^4$ gültigen Lösung.
[3] S. z. B. *R. Trostel*, Ing.-Arch. 24, 1956 S. 1.

so erhalten wir aus (70c)

$$\bar{a}_1 = 8 \int_{r_i}^{r_a} r^5 \sigma_r^{(1)^2}\, dr \approx 8\, R^5 \int_{x=-h/2}^{+h/2} \sigma_r^{(1)^2}(x)\, dx = \frac{1}{15}\sigma_0^2(\Delta\vartheta)^2 h^3 R^3 ,$$

$$\bar{a}_2 = 8(1+\nu) \int_{r_i}^{r_a} r^3 \sigma_r^{(1)^2}\, dr \approx 8(1+\nu) R^3 \int_{x=-h/2}^{+h/2} \sigma_r^{(1)^2}(x)\, dx = \frac{1+\nu}{15}\sigma_0^2(\Delta\vartheta)^2 h^3 R ,$$

$$a_4 = \int_{r_i}^{r_a} r \sigma_z^{(1)^2}\, dr \approx R \int_{x=-h/2}^{+h/2} \sigma_z^{(1)^2}(x)\, dx = \frac{1}{12}\sigma_0^2(\Delta\vartheta)^2 R h ,$$

also aus (74b) mit

$$8\,\bar{a}_1 a_4 - \bar{a}_2^2 = \frac{(\sigma_0 \Delta\vartheta\, h\, R)^4}{225}\left[10 - (1+\nu)^2\left(\frac{h}{R}\right)^2\right] \approx \frac{2}{45}(\sigma_0 \Delta\vartheta\, h\, R)^4$$

schließlich

$$\bar{c}_1^2 = \frac{1-\nu^2}{4R^2}, \qquad \bar{c}_2^4 = \frac{5(1-\nu^2)}{8h^2R^2} = \frac{10}{16}\frac{1-\nu^2}{R^4}\left(\frac{R}{h}\right)^2 \gg c_1^4 = \frac{1}{16}\frac{(1-\nu^2)^2}{R^4}.$$

Aus (75c) hat man dann

$$\varkappa_1 \approx \varkappa_2 \approx \varkappa \approx l \sqrt[4]{\bar{c}_2^4/4}, \qquad \varkappa\zeta = \varkappa\frac{2z}{l} = z\sqrt[4]{4\,\bar{c}_2^4} = z\sqrt[4]{\frac{2{,}5(1-\nu^2)}{h^2R^2}} = z/\mathfrak{L},$$

$$\mathfrak{L} = \sqrt[4]{\frac{h^2R^2}{2{,}5(1-\nu^2)}} = 0{,}795\sqrt[4]{\frac{h^2R^2}{1-\nu^2}}. \tag{78a}$$

Aus einer bekannten Näherungstheorie für den rotationssymmetrischen Biegespannungszustand einer Kreiszylinderschale folgt[1]

$$\mathfrak{L} = \sqrt[4]{\frac{h^2R^2}{3(1-\nu^2)}} = 0{,}761\sqrt[4]{\frac{h^2R^2}{1-\nu^2}}, \tag{78b}$$

was mit dem obigen Grenzwert nach (78a) für den Abklingungskoeffizienten praktisch übereinstimmt.

4. Zusammenfassung. Mit Hilfe von einfachen Näherungsansätzen, die in die, einem jeweiligen Problem zugehörigen Variationsintegrale eingeführt werden, kommt man im allgemeinen zu ausgezeichneten Approximationen. Neben der dem *Ritz*schen Verfahren entsprechenden Methode, Näherungsansätze bis auf willkürliche Konstanten vorzugeben, die dann aus Extremalbedingungen berechnet werden können, scheint vor allem das im letzten Abschnitt geschilderte Verfahren, das auf einfach lösbare Differentialgleichungen für die Näherungsfunktionen führt, eine besondere Bedeutung auch für andere Probleme der Elastizitätstheorie zu haben.

(Eingegangen am 14. Dezember 1959.)

Anschrift des Verfassers: Privatdozent Dr.-Ing. *R. Trostel*, Berlin-Charlottenburg 2, Hardenbergstr. 34, Lehrstuhl für Mechanik der Technischen Universität.

[1] S. z. B. *I. Szabó*, Einführung in die Technische Mechanik, 4. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959.

The Stability of Motion of a Rotor with Unsymmetrical Shaft on an Elastically Supported Mass Foundation

By **A. Tondl**

1. Introduction. Several authors have made study of the dynamics of rotors with unequal shaft stiffness in two mutually perpendicular directions. In almost all their work the solutions are performed under the assumption of perfectly rigid bearing supports upon an absolutely rigid foundation (see for instance[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]). The author of this paper has also solved the case of a rotor mounted upon elastic, massless supports[9, 10].

With the tendency to construct light and more elastic foundations for turbogenerators (particularly low-tuned steel foundations) the question arises in the case of two-pole generators whether the stability of the rotors is not adversely affected by low tuning of the foundation.

The solution to be presented in this paper is carried out on a simplified system; several examples are used for elucidating the effect of the foundation tuning upon the stability of the rotor motion.

2. Solution of the Problem. Let us assume a one-disk rotor with mass m mounted on a massless shaft whose section at the place of the disk attachment has stiffnesses c_1 and c_2. The rotor rotates with a constant angular velocity ω. For the sake of simplicity let us neglect the elasticity of the bearing supports. Let us further assume that the mounting of the rotor upon the foundation can be represented in a simplified form by the scheme of Fig. 1, in which the foundation can be replaced by a mass mounted elastically upon massless springs whose total stiffness in the vertical direction

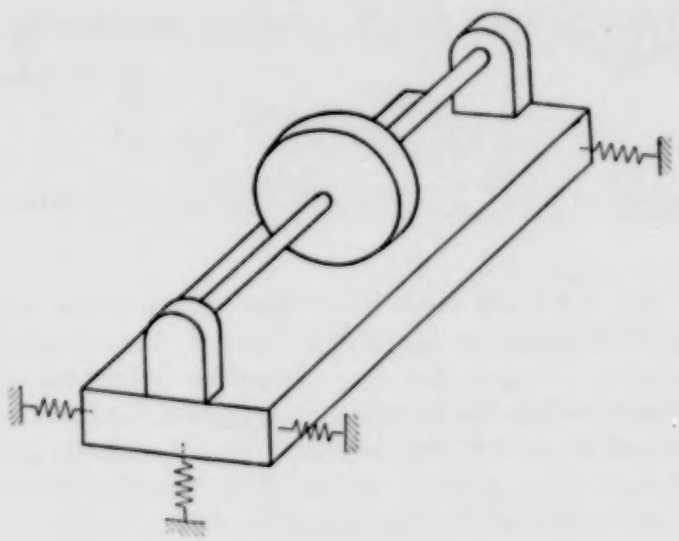


Fig. 1. Scheme of the system.

is c_{01} and in the horizontal direction c_{02}. Let us also assume that the disk is located on the shaft midway between the bearings and that the foundation is completely symmetrical relative to the disk plane so far as both distribution of the mass of the base plate and the rigidity of the mounting is concerned; thus in standstill position the disk centre of gravity (assuming perfect balance) lies

[1] *A. Stodola*, Dampf- und Gasturbinen, 5. Aufl., Berlin 1922, p. 931.
[2] *C. B. Biezeno* and *R. Grammel*, Technische Dynamik 2. Aufl. Bd. 2, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.
[3] *R. Soderberg*, (1931) ASME paper APM-54-4.
[4] *J. Dick*, Phil. Mag., 39 (1948) p. 946.
[5] *F. M. Dimentberg*, Izdat. ANSSSR, 1959.
[6] *O. N. Romaniv*, Lvovskij politechničeskij institut, Lvov, 1957.
[7] *H. D. Taylor*, J. Appl. Mech. 7 (1940) p. 71.
[8] *W. Kellenberger*, Ing.-Arch. 26 (1958) p. 302.
[9] *A. Tondl*, Rozpravy Čs. akademie věd, řada TV, No 5, 1955.
[10] *A. Tondl*, Vydavatelstvo SAV, Bratislava, 1958.

on the same vertical axis as the centre of gravity of the foundation mass m_0. This mass encompasses both the mass of the base plate and the mass of the stator, stands etc. Under these assumptions the gyroscopic effect of the rotor need not be taken into consideration.

Let us denote the coordinates of the disk centre of gravity as x, y and those of the centre of gravity of the foundation mass as x_0, y_0. Let us assume linear damping, namely damping proportional to velocities $\dot{x}_0, \dot{y}_0$ with coefficient k_0 (the damping of the foundation mass), and the damping of the rotor (induced by the motion of the rotor in the stator and in the bearings) which is proportional to the relative velocities $\dot{x} - \dot{x}_0$ and $\dot{y} - \dot{y}_0$, with coefficient k. The order of magnitude of the external damping proportional to $\dot{x}$ and $\dot{y}$ is lower than both previously mentioned dampings and can, therefore, be neglected.

For writing the differential equations of the motion let us use the Lagrange equations. Let us, therefore, establish the expressions for the kinetic, potential and dissipation energies.

We obtain for the kinetic energy:

$$2\,T = m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_0\,(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)\,, \tag{1}$$

for the potential energy:

$$2\,U = c_{01}\,x_0^2 + c_{02}\,y_0^2 + \frac{1}{2}\,(c_1 + c_2)\,[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$$
$$+ \frac{1}{2}\,(c_1 - c_2)\,\{[(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2]\cos 2\,\omega\,t + 2\,(x - x_0)\,(y - y_0)\sin 2\,\omega\,t\}\,, \tag{2}$$

and for the dissipation energy:

$$2\,W = k_0\,[\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2] + k\,[(\dot{x} - \dot{x}_0)^2 + (\dot{y} - \dot{y}_0)^2]\,. \tag{3}$$

Then using Lagrange's equations:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} = 0\,, \quad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{4}$$

where

$$q_1 = x\,,\ q_2 = y\,,\ q_3 = x_0\,,\ q_4 = y_0\,,$$

and introducing the small parameter

$$\mu = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}\,, \tag{5}$$

the following differential equations of motion are obtained:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x} + \delta_1\,(\dot{x} - \dot{x}_0) + \frac{c_1 + c_2}{2\,m}\,(x - x_0) = \mu\,\frac{c_1 + c_2}{2\,m}\,X\,,\\
&\ddot{y} + \delta_1\,(\dot{y} - \dot{y}_0) + \frac{c_1 + c_2}{2\,m}\,(y - y_0) = \mu\,\frac{c_1 + c_2}{2\,m}\,Y\,,\\
&\ddot{x}_0 + \delta_{10}\,(\dot{x}_0 - \dot{x}) + \delta_0\,\dot{x}_0 + \frac{c_{01}}{m_0}\,x_0 + \frac{c_1 + c_2}{2\,m_0}\,(x_0 - x) = -\mu\,\frac{c_1 + c_2}{2\,m_0}\,X\,,\\
&\ddot{y}_0 + \delta_{10}\,(\dot{y}_0 - \dot{y}) + \delta_0\,\dot{y}_0 + \frac{c_{02}}{m_0}\,y_0 + \frac{c_1 + c_2}{2\,m_0}\,(y_0 - y) = -\mu\,\frac{c_1 + c_2}{2\,m_0}\,Y\,,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

where

$$\delta_1 = \frac{k}{m}\,, \quad \delta_{10} = \frac{k}{m_0}\,, \quad \delta_0 = \frac{k_0}{m_0}\,,$$

$$X = (x - x_0)\cos 2\,\omega\,t + (y - y_0)\sin 2\,\omega\,t\,,$$

$$Y = -\,(y - y_0)\cos 2\,\omega\,t + (x - x_0)\sin 2\,\omega\,t\,.$$

The system of differential equations (6) is a quasiharmonic system where all members containing the periodically variable coefficients are multiplied by the small parameter. The approximate determination of the instability intervals (relative to the angular rotational velocity ω) is carried out by means of a method described in detail in a former paper[1].

[1] *A. Tondl*, Anlikace matematiky. 4 (1959) p. 278.

In the solution by means of the above mentioned method, we assume low damping so that the small parameter μ can be factored out. We then transform the system to normal coordinates relative to the abbreviated system (for zero value of the small parameter), and introduce substitution $\omega t = \tau$, in our case preferably $2\omega t = \tau$.

Thus we obtain a system of differential equations in the form

$$x_s'' - \lambda_s^2 x_s = \mu \sum_{k=1}^{n} (Q_{sk} x_k' + P_{sk} x_k), \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{7}$$

where

$$\lambda_s = \pm i \frac{\Omega_s}{\omega} \quad (i = \sqrt{-1}),$$

Ω_s are the natural frequencies of the abbreviated system and $Q_{sk} = Q_{sk}(\tau)$, $P_{sk} = P_{sk}(\tau)$ are continuous periodic functions of τ with period 2π or constants which can be developped into Fourier's series. Let us assume that λ_s differ from zero and from each other ($\lambda_s \neq \lambda_k$, $s \neq k$).

Substituting

$$x_s' + \lambda_s x_s = \xi_s, \quad x_s' - \lambda_s x_s = \eta_s, \tag{8}$$

we obtain the system in the form

$$\left.\begin{aligned} \xi_s' &= \lambda_s \xi_s + \mu F_s, \\ \eta_s' &= -\lambda_s \eta_s + \mu F_s \end{aligned}\right\} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{9}$$

where

$$F_s = \sum_{k=1}^{n} \left[Q_{sk} (\xi_k + \eta_k) + \frac{1}{\lambda_k} P_{sk} (\xi_k - \eta_k) \right].$$

On the basis of Floquet's theorem, we can write

$$\xi_s = u_s e^{[\lambda + i\mu\varkappa(\mu)]\tau}, \quad \eta_s = v_s e^{[\lambda + i\mu\varkappa(\mu)]\tau}, \tag{10}$$

where u_s, v_s are periodic functions τ with period 2π and λ is the root of the characteristic equation of the abbreviated system. Introducing substitutions (10) into system (9) we obtain differential equations

$$\left.\begin{aligned} u_s' &= (\lambda_s - \lambda) u_s + \mu\left(-i\varkappa u_s + \frac{1}{2} F_s\right), \\ v_s' &= -(\lambda_s + \lambda) v_s + \mu\left(-i\varkappa v_s + \frac{1}{2} F_s\right) \end{aligned}\right\} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{11}$$

The instability interval can be expected in the vicinity of values[1, 2, 3]

$$\omega_0 = \frac{\Omega_j \pm \Omega_r}{N} \quad (\Omega_j > \Omega_r) \tag{12a}$$

or

$$\lambda_j \pm \lambda_r = i N \quad (j, r = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{12b}$$

where $N > 0$ is an integer. Then we speak of the instability interval of the N-th order.

When searching for the instability interval in the vicinity of value

$$\omega_0 = \frac{\Omega_j \pm \Omega_r}{N},$$

we introduce substitution

$$\lambda_j^* + \lambda_r^* = i N + \mu i \alpha(\mu), \tag{13}$$

where α is a real function of μ.

---

[1] *I. G. Malkin*, Gostechizdat, Moskva 1956, p. 337.
[2] *V. A. Jakubovič*, Prikladnaja matematika i mechanika, 21 (1957) p. 707.
[3] *A. Tondl*, Strojnoelektrotechnický časopis, 9 (1958) p. 384.

Substituting λ_r for λ in equation (11) and using substitution (13), we obtain the following system of differential equations:

$$\left.\begin{aligned} u_r' &= \mu\left(-i\,\varkappa\,u_r + \frac{1}{2}F_r\right), \\ v_j' &= -i\,N\,v_j + \mu\left[-i\,(\varkappa+\alpha)\,v_j + \frac{1}{2}F_j\right], \\ u_s' &= (\lambda_s^* - \lambda_r^*)\,u_s + \mu\left(-i\,\varkappa\,u_s + \frac{1}{2}F_s\right) \quad (s=1,2,\ldots,n;\, s\neq r), \\ v_s' &= -(\lambda_s^* + \lambda_r^*)\,v_s + \mu\left(-i\,\varkappa\,v_s + \frac{1}{2}F_s\right) \quad (s=1,2,\ldots,n;\, s\neq j). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Now, let us find a periodic solution of u_s, v_s period 2π. The solution is to be in the form of a series relative to parameter μ carried out by means of an auxiliary system according to *Šimanov*[1]. From the conditions of the solution periodicity, coefficient $\varkappa$ is determined with any arbitrary accuracy.

The interval of unstable solutions will be associated with that coefficient $\varkappa$ whose imaginary component is negative. Coefficient α and consequently the instability interval will be determined from this condition.

According to the procedure referred to above and assuming small values of the damping coefficients, the following substitutions are introduced into the system (6):

$$\delta_1 = \mu\,\vartheta_1, \quad \delta_{10} = \mu\,\vartheta_{10}, \quad \delta_0 = \mu\,\vartheta_0, \quad 2\,\omega\,t = \tau\,. \tag{15}$$

For the system under investigation, the general equations (14) are obtained in the form

$$\left.\begin{aligned} \varphi_s' &= (\lambda_s - \lambda)\,\varphi_s + \mu\,F_s, \\ \psi_s' &= -(\lambda_s + \lambda)\,\psi_s + \mu\,F_s \end{aligned}\right\} \quad (s=1,2,3,4), \tag{16}$$

where with $k = 1, 3$

$$\lambda_s = i\,\frac{\Omega_s}{2\,\omega},$$

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{c_1+c_2}{2\,m} + \frac{c_1+c_2+2\,c_{01}}{2\,m_0} \pm \sqrt{\left(\frac{c_1+c_2}{2\,m}\right)^2 + \left(\frac{c_1+c_2+2\,c_{01}}{2\,m_0}\right)^2 + \frac{(c_1+c_2)(c_1+c_2-2\,c_{01})}{2\,m\,m_0}}\right],$$

$$\Omega_{3,4}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{c_1+c_2}{2\,m} + \frac{c_1+c_2+2\,c_{02}}{2\,m_0} \pm \sqrt{\left(\frac{c_1+c_2}{2\,m}\right)^2 + \left(\frac{c_1+c_2+2\,c_{02}}{2\,m_0}\right)^2 + \frac{(c_1+c_2)(c_1+c_2-2\,c_{02})}{2m\,m_0}}\right],$$

$$F_k = -\frac{1}{4\,\omega}[\Theta_k\,(\varphi_k + \psi_k) + \Phi_k\,(\varphi_{k+1} + \psi_{k+1})] + \frac{K_k}{16\,\omega^2}H_k,$$

$$F_{k+1} = -\frac{1}{4\,\omega}[\Theta_{k+1}\,(\varphi_{k+1} + \psi_{k+1}) + \Phi_{k+1}\,(\varphi_k + \psi_k)] + \frac{K_{k+1}}{16\,\omega^2}H_k\,,$$

$$\Theta_k = \frac{1}{a_{k+1} - a_k}[(1 - a_k)\,(a_{k+1}\,\vartheta_1 + \vartheta_{10}) - a_k\,\vartheta_0]\,,$$

$$\Theta_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1} - a_k}[(a_{k+1} - 1)\,(a_k\,\vartheta_1 + \vartheta_{10}) + a_{k+1}\,\vartheta_0]\,,$$

$$\Phi_k = \frac{1}{a_{k+1} - a_k}[(1 - a_{k+1})\,(a_{k+1}\,\vartheta_1 + \vartheta_{10}) - a_{k+1}\,\vartheta_0]\,,$$

$$\Phi_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1} - a_k}[(a_k - 1)\,(a_k\,\vartheta_1 + \vartheta_{10}) + a_k\,\vartheta_0]\,,$$

$$K_k = \frac{1}{a_{k+1} - a_k}\left(a_{k+1}\,\frac{c_1+c_2}{2\,m} + \frac{c_1+c_2}{2\,m_0}\right),$$

$$K_{k+1} = \frac{1}{a_k - a_{k+1}}\left(a_k\,\frac{c_1+c_2}{2\,m} + \frac{c_1+c_2}{2\,m_0}\right),$$

[1] *S. N. Šimanov*, Prikladnaja matematika i mechanika, 16 (1952) p. 129.

$$a_r = \frac{\frac{c_1 + c_2}{2\,m_0}}{\frac{c_1 + c_2 + 2\,c_{01}}{2\,m_0} - \Omega_r^2} \quad (r = 1, 2)\,,$$

$$a_j = \frac{\frac{c_1 + c_2}{2\,m_0}}{\frac{c_1 + c_2 + 2\,c_{02}}{2\,m_0} - \Omega_j^2} \quad (j = 3, 4)\,,$$

$$H_1 = \left[\frac{a_1 - 1}{\lambda_1}(\varphi_1 - \psi_1) + \frac{a_2 - 1}{\lambda_2}(\varphi_2 - \psi_2)\right](e^{i\tau} + e^{-i\tau})$$
$$- i\left[\frac{a_3 - 1}{\lambda_3}(\varphi_3 - \psi_3) + \frac{a_4 - 1}{\lambda_4}(\varphi_4 - \psi_4)\right](e^{i\tau} - e^{-i\tau})\,,$$

$$H_3 = \left[\frac{1 - a_3}{\lambda_3}(\varphi_3 - \psi_3) + \frac{1 - a_4}{\lambda_4}(\varphi_4 - \psi_4)\right](e^{i\tau} + e^{-i\tau})$$
$$- i\left[\frac{a_1 - 1}{\lambda_1}(\varphi_1 - \psi_1) + \frac{a_2 - 1}{\lambda_2}(\varphi_2 - \psi_2)\right](e^{i\tau} - e^{-i\tau})\,.$$

When the labile region is to be determined in the vicinity of $\omega_0 = \Omega_1/N$ (the labile region of the first kind of the N-th order; according to notation used in my former paper, labile region of the first kind is the region in the vicinity of $\omega_0 = \Omega_k/N$, while labile region of the second kind is the region in the vicinity of $\omega_0 = (\Omega_k \pm \Omega_j)/2\,N$, when $\Omega_k > \Omega_j$; $k \neq j$), then root λ_1 is taken in lieu of λ and the following substitution introduced:

$$2\,\lambda_1 = i\,N + \mu\,i\,\varkappa(\mu)\,, \tag{17}$$

where $N = 1, 2, 3 \ldots$

Replacing λ by root λ_1 and using substitution (17) as well as adding member W_1 to the first and member $W_2\,e^{-iN\tau}$ to the second equation of system (16), (W_1, W_2 are constants), we obtain the following auxiliary system:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1' &= \mu\,(F_1 - i\,\varkappa\,\varphi_1) + W_1\,,\\
\psi_1' &= -\,i\,N\,\psi_1 + \mu\,[F_1 - i\,(\varkappa + \varkappa)\,\psi_1] + W_2\,e^{-iN\tau}\,,\\
\varphi_s' &= (\lambda_s^* - \lambda_1^*)\,\varphi_s + \mu\,(F_s - i\,\varkappa\,\varphi_s)\,,\\
\psi_s' &= -\,(\lambda_s^* + \lambda_1^*)\,\psi_s + \mu\,(F_s - i\,\varkappa\,\psi_s)
\end{aligned}\right\}\ (s = 2, 3, 4)\,. \tag{18}$$

Let us assume that

$$\lambda_s^* \pm \lambda_1^* = M\,i \quad (M \text{ is an integer};\ s = 2, 3, 4). \tag{19}$$

Let it now be required to find periodic solutions for $\varphi_k, \psi_k\,(k = 1, 2, 3, 4)$ with period of $2\,\pi$ in the form of series

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_k &= \varphi_{k0} + \mu\,\varphi_{k1} + \mu^2\,\varphi_{k2} + \cdots,\\
\psi_k &= \psi_{k0} + \mu\,\varphi_{k1} + \mu^2\,\varphi_{k2} + \cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Likewise, constants W_1 and W are to be expressed in the form

$$\left.\begin{aligned}
W_1 &= W_{10} + \mu\,W_{11} + \mu^2\,W_{12} + \cdots,\\
W_2 &= W_{20} + \mu\,W_{21} + \mu^2\,W_{22} + \cdots.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Selecting the initial conditions

$$\varphi_1(0) = A, \quad \psi_1(0) = B\,, \tag{22}$$

then the remaining six conditions will depend, according to the *Šimanov's* theorem, on A and B. In harmony with the initial conditions (22) we can select the initial conditions

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{10}(0) = A, \quad \psi_{10}(0) = B,\\
&\varphi_{1j}(0) = 0, \quad \psi_{1j}(0) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \ldots)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Introducing into the auxiliary system (18) expressions for φ_k, ψ_k and W_1, W_2 from equations (20) and (21), we obtain for the first approximation

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{10} &= A, \\ \psi_{10} &= B\, e^{-iN\tau}, \\ \varphi_{s0} &= 0, \quad \psi_{s0} = 0 \quad (s = 2, 3, 4, \\ W_{10} &= 0, \quad W_{20} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

From the condition of the solution periodicity, the second approximation yields for $N = 1$ the following expressions for W_{11} and W_{21}:

$$\left.\begin{aligned} W_{11} &= \left(\frac{1}{4\,\omega_0}\,\Theta_1 + i\,\varkappa\right) A + \frac{K_1}{16\,\omega_0^2}\,\frac{a_1 - 1}{\lambda_1^*}\,B\,, \\ W_{21} &= \left[\frac{1}{4\,\omega_0}\,\Theta_1 + i\,(\varkappa + \alpha)\right] B - \frac{K_1}{16\,\omega_0^2}\,\frac{a_1 - 1}{\lambda_1^*}\,A\,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

If the first two approximations are satisfactory, i. e. if

$$\left.\begin{aligned} W_1 &\doteq W_{10} + \mu\, W_{11} = 0\,, \\ W_2 &\doteq W_{20} + \mu\, W_{21} = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

a system of two homogeneous linear algebraic equations is obtained for A and B. From the condition of a non-trivial solution we can write the following equation for $\varkappa$:

$$\varkappa^2 + \left(\alpha - i\,\frac{\Theta_1}{2\,\omega_0}\right)\varkappa - \left(\frac{K_1\,(a_1 - 1)}{16\,\omega_0^2\,\lambda_1^*}\right)^2 - \frac{\Theta_1^2}{16\,\omega_0^2} - i\,\alpha\,\frac{\Theta_1}{4\,\omega_0} = 0\,. \tag{27}$$

Using the Routh-Hourwitz criterion we get the following condition for the instability of the solution, i. e. for the negative imaginary part

$$\alpha^2 + \frac{1}{4}\,\frac{\Theta_1^2}{\omega_0^2} + \left[\frac{K_1\,(a_1 - 1)}{16\,\omega_0^2\,\lambda_1^*}\right]^2 < 0\,. \tag{28}$$

Using equation (17) and inserting $\lambda_1^* \doteq i\,\Omega_1/2\,\omega_0$, we obtain the appropriate instability interval. Using only the coefficients of the first powers of the small parameter μ, the conditions for the instability intervals are established as

$$\frac{|\Omega_j \pm \Omega_k|}{2} - \mu\,\Delta_{jk} < \omega < \frac{|\Omega_j \pm \Omega_k|}{2} + \mu\,\Delta_{jk}, \quad (j, k = 1, 2, 3, 4) \tag{29}$$

where

$$\Delta_{jk} = \frac{1}{4}\,\frac{\Theta_j + \Theta_k}{\sqrt{\Theta_j\,\Theta_k}}\sqrt{\pm\,\frac{K_j\,K_k}{4\,\Theta_j\,\Theta_k}\,(a_j - 1)\,(a_k - 1) - \Theta_j\,\Theta_k}\,.$$

The interval limits are real as long as the discrimant under the radical sign is real. Only one sign can come into consideration in inequalities (29). Thus a maximum of ten instability intervals can be obtained. When higher orders ($N = 2, 3 \ldots$), are also considered, real limits of unstable intervals are not obtained for the number of approximations used above. Only additional approximations would enable us to also obtain intervals of higher orders as long as the damping remains satisfactorily small.

Let us now analyze the effect of the foundation tuning and the position of the foundation natural frequencies relative to the rotor natural frequency. Principally, three cases can be distinguished. In the first case, both natural frequencies of the foundation are higher than the natural frequency of the rotor itself in absolutely rigid supports. In the second instance, one of the foundation natural frequencies is higher and the other lower than the rotor natural frequency. And in the third case, both natural frequencies of the foundation are lower than the rotor natural frequency.

The effect of the foundation tuning is best elucidated by means of examples. Let us assume that the mass of the disk and that of the foundation is the same in all three cases, namely $m = 0{,}1$ kg cm^{-1} sec^2, $m_0 = 1$ kg cm^{-1} sec^2. Furthermore, let us assume that the average shaft stiffness is also the same in all three cases, namely $\frac{c_1 + c_2}{2} = 1.10^3$ kg cm^{-1}.

Let it be required that the stiffnesses of the foundation mounting have the following values in the individual cases:

	I.	II.	III.
c_{01} [kg cm^{-1}]	4.10^4	2.10^4	6.10^3
c_{02} [kg cm^{-1}]	2.10^4	4.10^4	2.10^3

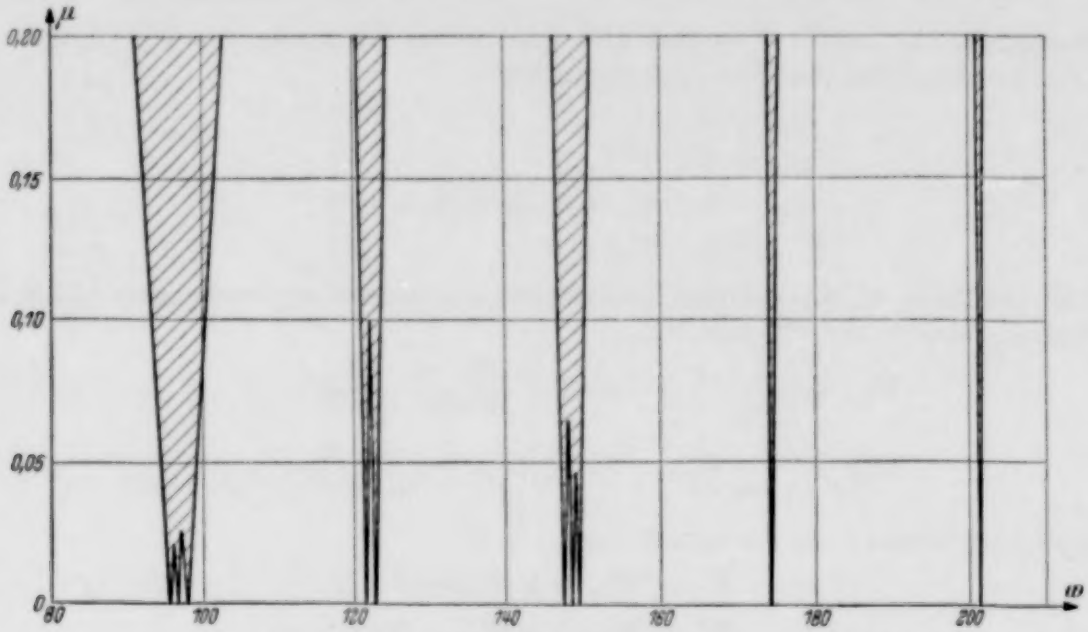


Fig. 2. Boundaries of the instability regions for case I with zero damping.

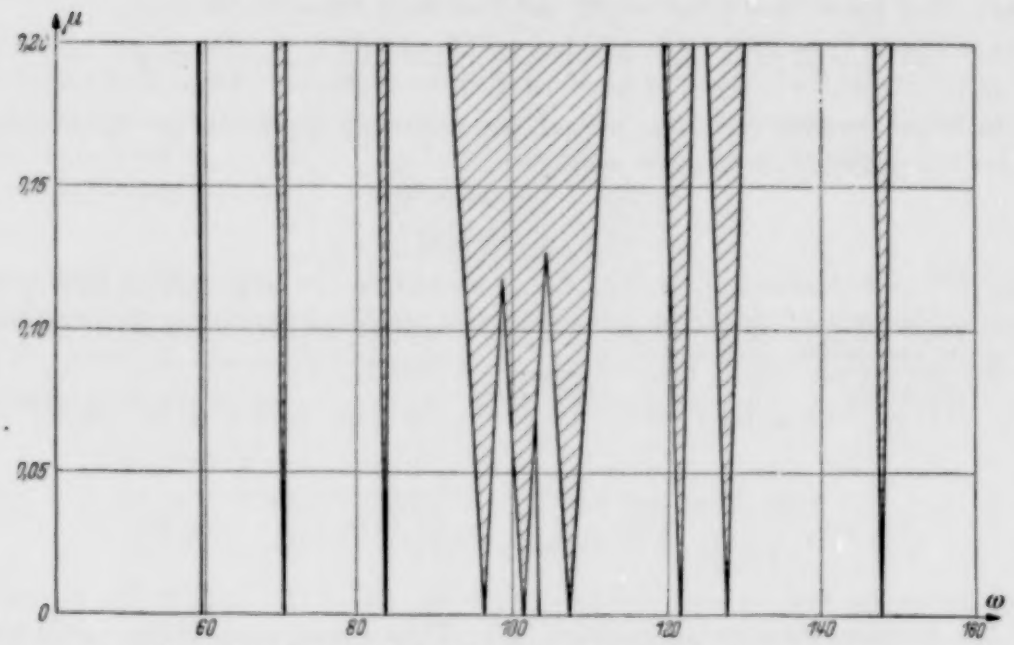


Fig. 3. Boundaries of the instability regions for case II with zero damping.

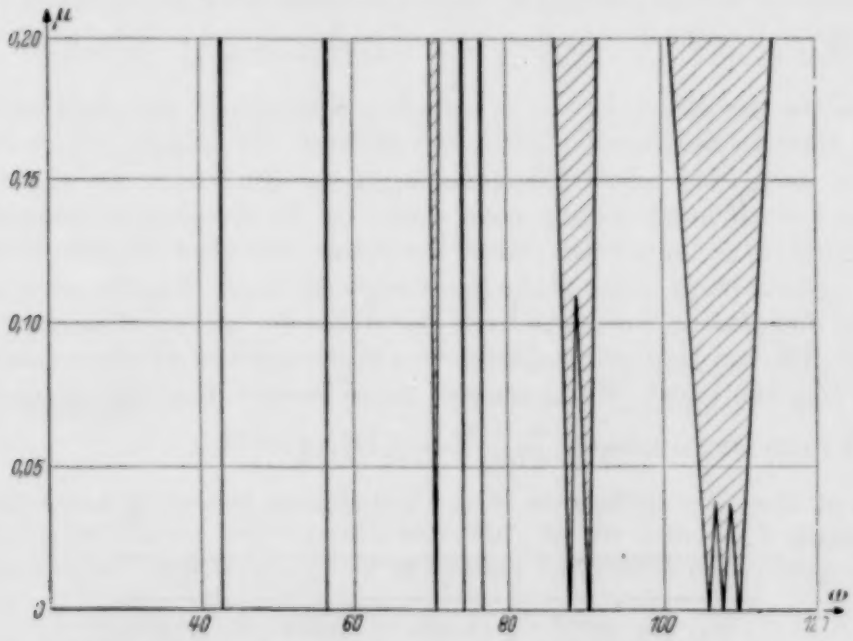


Fig. 4. Boundaries of the instability regions for case III with zero damping.

The appropriate natural frequencies of the system are

	I.	II.	III.
Ω_1	97.8	95.6	109.4
Ω_2	201.5	147.5	70.7
Ω_3	95.6	107.3	105.8
Ω_4	147.8	58.8	42.8

Let us select equal damping coefficients for all three cases. In order to evaluate the effect of the damping magnitude, let us select four different values of the damping coefficients while maintaining their mutual relations:

	a)	b)	c)	d)
k (kg cm^{-1} sec)	0	0.4	0.6	0.8
k_0 (kg cm^{-1} sec)	0	6	9.0	12

Figs. 2, 3 and 4 show the diagrams of the instability regions for all three cases of the foundation tuning and for $k = 0$, and $k_0 = 0$. Figs. 5, 6 and 7 show similar diagrams for damping coefficients $k = 0.4$ kg cm^{-1} sec and $k_0 = 6.0$ kg cm^{-1} sec. Figs. 8, 9 and 10 contain the same diagrams both

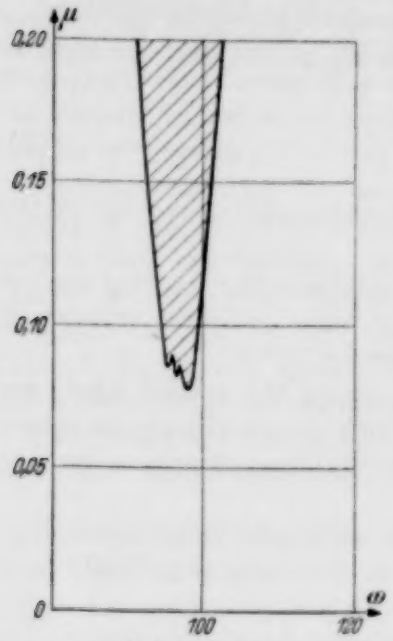


Fig. 5. Case I.

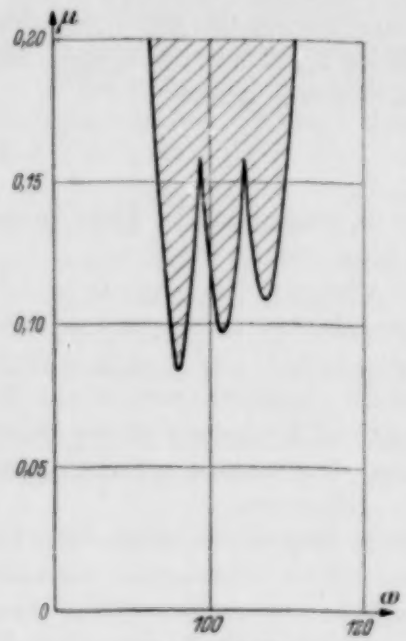


Fig. 6. Case II.

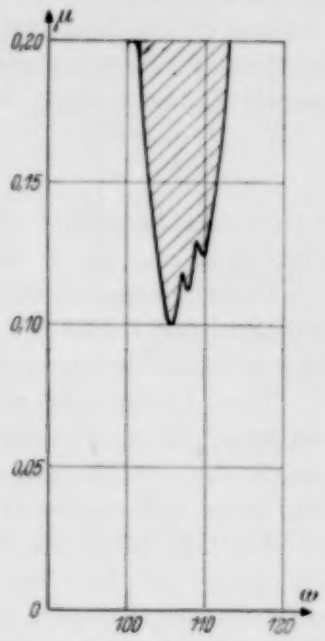


Fig. 7. Case III.

Boundaries of the instability regions for damping coefficients $k = 0{,}4$ and $k_0 = 6$.

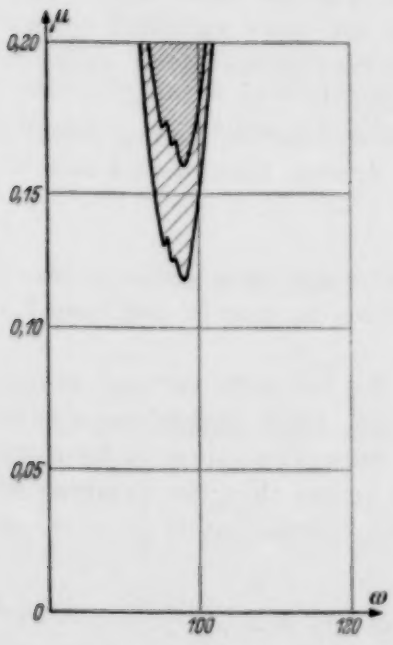


Fig. 8. Case I.

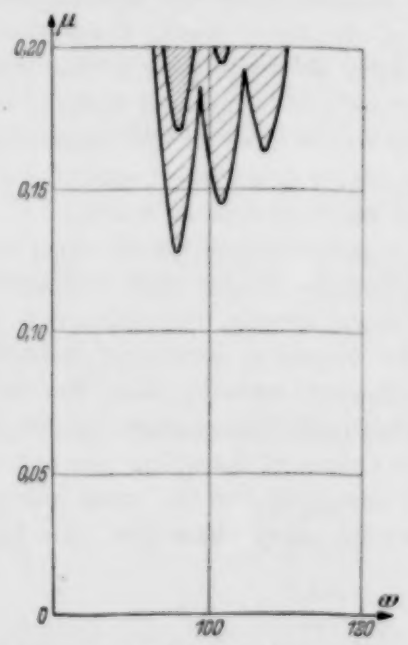


Fig. 9. Case II.

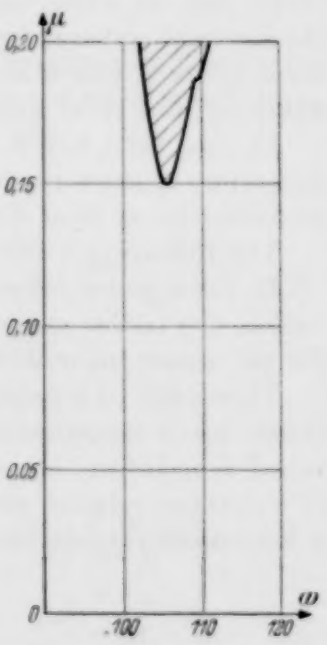


Fig. 10. Case III.

Boundaries of the instability regions for damping coefficients $k = 0{,}6$, $k_0 = 9$ (light cross-hatching) and $k = 0{,}8$, $k_0 = 12$ (heavy cross-hatching).

for damping with coefficients $k = 0.6$ kg cm^{-1} sec, $k_0 = 9.0$ kg cm^{-1} sec (light cross-hatching) and for coefficients $k = 0.8$ kg cm^{-1} sec, $k_0 = 12$ kg cm^{-1} sec (heavy cross-hatching). In the last instance there exist three merging regions for the case I, two for the case II for the largest damping within the given range of parameter μ. For these values of damping, there exists no instability region for the third case within the given range of μ. When there is no damping or the damping is slight, the case II appears as the most unfavourable in view of the total width of labile regions for a given μ. With damping, the coefficient for which labile regions exist no longer attains the lowest value μ for the case I, and the highest value for case III which is the most favourable.

3. Conclusion. Let us first compare the results obtained in the known case of an absolutely rigid foundation. For the simplest type of rotor (one disk on a massless shaft) there exists a single instability interval of the shaft angular rotational velocity which is limited for the undamped motion by the natural frequencies corresponding to the different shaft stiffnesses. This interval becomes narrower or disappears completely due to the effect of damping. Thus the instability interval is spread in the vicinity of the rotor angular velocity corresponding to the average natural frequency of the rotor [i. e. the frequency corresponding to the average stiffness of the shaft, $\frac{1}{2}(c_1 + c_2)$].

The case of an elastic mass foundation is more complex. Owing to the foundation elasticity — which is practically always different in horizontal and vertical directions — four average natural frequencies of the system Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 are obtained in the above simplified case. The instability regions of the first order which are always the most important are obtained partly in the vicinity of these average natural frequencies Ω_k ($k = 1, 2, 3, 4$) — the unstable regions of the first kind — partly in the vicinity of combination frequencies

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\,|\Omega_j + \Omega_k| \quad (k, j = 1, 2, 3, 4;\ k \neq j) \tag{30}$$

which can be called the regions of second kind. Thus in our case four instability regions of the first kind and six of the second kind are obtained.

For the cases discussed above all instability regions of the second kind lie in the interval limited by the lowest and the highest instability regions of the first kind, i. e. they lie in the vicinity of the combination frequencies where only the plus sign is considered (see eq. (29)).

Thus three substantial instability regions (two of the first kind, one of the second kind) are obtained in the vicinity of the natural frequency of the rotor itself, which practically merge into a single region. The remaining instability regions are very narrow and completely disappear for not too large differences in the shaft stiffnesses.

For the case I when both partial frequencies of the foundation itself are higher than the average frequency of the rotor itself, these three substantial instability regions (merging practically into one) for the damped system reach to lower values of μ than in cases II and III. Thus a smaller difference in the shaft stiffnesses is necessary for complete disappearance of instability regions for the same damping.

In case II when one partial frequency of the foundation is lower and the other higher than the average natural frequency of the rotor itself, these three regions are more extended so that for a given μ which is greater than the minimum μ (for which labile regions disappear owing to damping) the total width of regions will be greater than in cases I and III.

In case III when both partial frequencies of the foundation are lower than the average natural frequency of the rotor itself, this case is more favourable for a damped system than cases I and II, particularly at high damping of the foundation mass.

The following holds true for equal damping in all three cases:

If, for a given value of the difference in the shaft stiffnesses, the rotor motion is stable in case I within the entire range of rotational speeds, the motion is always stable in case II and case III for the same rotor damping; the opposite, however, does not apply.

This leads to a practical conclusion, namely were the motion of the two-pole turbogenerator stable when mounted on a high-tuned foundation, it would be much more stable on a low-tuned foundation, as long as the values of damping are not reduced. Since the values of damping of the rotor relative motion are identical for the same machine, this means that the damping of a low-tuned foundation must not be lower than that of a higher-tuned foundation.

(Eingegangen am 18. Januar 1960)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Aleš Tondl* Praha 1 (ČSR) Zborovská 41.

Die Spannungen in der nur am Rande belasteten, um einen Durchmesser verbogenen Kreisringplatte

Von **Jürgen Raasch**

1. Einleitung. In der Verfahrenstechnik werden auf Hohlzapfen gelagerte rotierende zylindrische Gefäße verhältnismäßig häufig verwendet (Kugelmühlen, Mischtrommeln, Filtertrommeln). Ihre Stirnplatten werden, wie Abb. 1 erkennen läßt, durch die Auflagerkraft A auf Zug und Druck und durch ein Moment $M_0 = A\,s$ auf Biegung beansprucht. Im allgemeinen dürfen die von der Auflagerkraft verursachten Zug- und Druckspannungen gegenüber den Biegespannungen vernachlässigt werden. Im folgenden soll daher — als ein Problem von erheblichem praktischem Interesse — die Beanspruchung einer Kreisringplatte durch Biegemomente am Innen- und Außenrand untersucht werden, wobei zunächst eine vollkommen starre Einspannung an den Rändern angenommen wird.

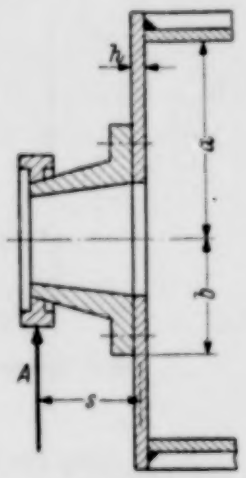


Abb. 1. Kugelmühlen-Stirnwand.

Ein ähnliches Problem ist im Jahre 1929 von *H. Reißner* [1] behandelt worden. Er untersuchte die Spannungen in einer flexiblen Kupplung in Abhängigkeit vom Verdrehungswinkel. Die Ergebnisse ließen sich nicht in geschlossenen Ausdrücken darstellen und wurden deshalb in Form einer kleinen Tabelle mitgeteilt.

Demgegenüber ist es in der vorliegenden Arbeit gelungen, eine vollständige Lösung in geschlossener Form zu erhalten. Für den Höchstwert der Spannungen wird ein einfacher Ausdruck gefunden, der als Berechnungsgrundlage für den konstruierenden Ingenieur von Interesse sein dürfte. Weiterhin wird hier untersucht, wie sich der Spannungszustand in einer Kreisringplatte ändert, wenn die Bedingungen einer starren Einspannung am Innen- und Außenrand nicht erfüllt sind.

Die Grundlage der mitgeteilten vollständigen Lösungen wie auch der Lösung von *H. Reißner* ist die *Kirchhoff*sche Plattentheorie mit ihren bekannten Näherungsvoraussetzungen.

2. Ausgangsgleichungen. Für die nur am Rande belastete Platte lautet die Grundgleichung der Durchbiegung w_0

$$\Delta\Delta w_0 = 0\,, \tag{1}$$

Bei Verwendung von Zylinderkoordinaten r, φ hat das Symbol Δ die Bedeutung

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\,. \tag{2}$$

Mathematisch gesehen besteht die Aufgabe darin, eine Lösung von (1) zu finden, die den jeweiligen Randbedingungen genügt. Ist die Durchbiegung w_0 als Funktion der Koordinaten r und φ bekannt, so können die Spannungen für jeden Punkt der Platte berechnet werden. Es gilt

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= -\frac{2G}{m-1}\,z\left[m\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2}\right],\\
\sigma_\varphi &= -\frac{2G}{m-1}\,z\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + m\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2}\right)\right],\\
\tau_{r\varphi} &= -2G\,z\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_0}{\partial \varphi}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Für die in radialen und konzentrischen Schnittflächen je Längeneinheit übertragenen Kräfte und Momente erhält man damit

$$\left.\begin{aligned}
m_r &= -\frac{N}{m}\left[m\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2}\right], & m_\varphi &= -\frac{N}{m}\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + m\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2}\right)\right],\\
m_{r\varphi} &= -(m-1)\frac{N}{m}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_0}{\partial \varphi}\right), & t_r &= -N\frac{\partial \Delta w_0}{\partial r}, \qquad t_\varphi = -N\frac{\partial \Delta w_0}{r\,\partial \varphi}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[1] *H. Reißner*, Ing.-Arch. 1 (1930), S. 72.

Die Spannungsresultanten wurden angegeben, weil sie im folgenden zur Formulierung der Randbedingungen verwendet werden. Abb. 2 gibt über Richtung und Vorzeichen Auskunft.

Mit

$$N = \frac{m\,G\,h^3}{6\,(m-1)} \tag{5}$$

ist dabei die sogenannte Plattensteifigkeit eingeführt. Die Buchstaben G und m bezeichnen wie üblich, Schubmodul und *Poisson*sche Zahl (Stahl $m \approx 10/3$), und h bedeutet die Dicke der Platte.

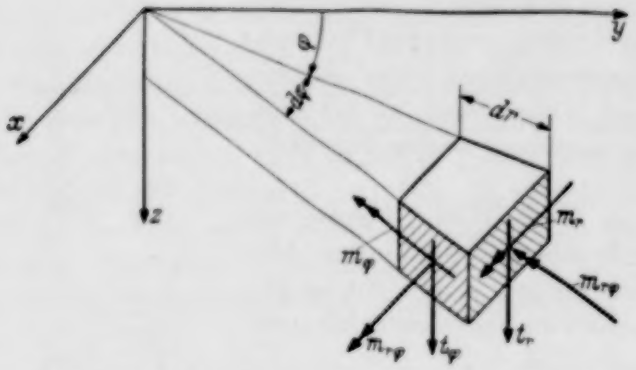


Abb. 2. Spannungsresultanten an einem Plattenelement.

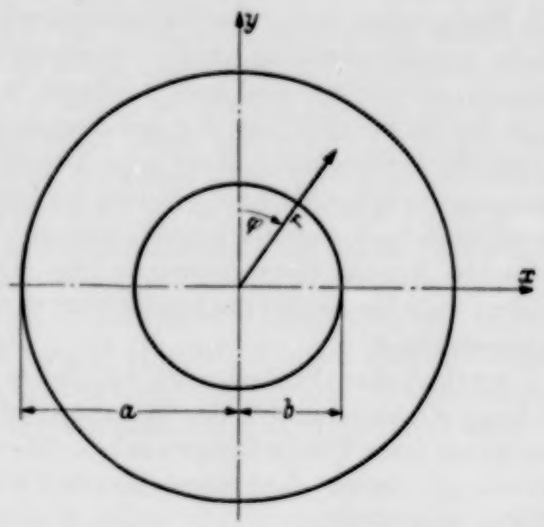


Abb. 3. Koordinatensystem.

3. Lösung für die Kreisringplatte mit starrer Einspannung am Innen- und Außenrand. Die Lage des Koordinatensystems ist aus Abb. 3 zu entnehmen. Mit b und a werden Innen- und Außenradius der Kreisringplatte bezeichnet. Es wird angenommen, daß die Platte durch ein Moment vom Betrag M_0 um die x-Achse verbogen wird.

Wenn für die Lösungsfunktion der Ansatz gemacht wird

$$w_0 = \left(A\,r^3 + B\,r + \frac{C}{r} + D\,r \ln r\right) \cos\varphi\,, \tag{6}$$

so entspricht dies allen Forderungen der Symmetrie. Man kann leicht zeigen, daß (6) die Grundgleichung (1) erfüllt.

Zunächst sollen an Hand der Abb. 2 die Gleichgewichtsbedingungen für den Innen- und Außenrand formuliert werden. Man erhält die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi} t_r\,r\,d\varphi &= 0\,, \\ \int_0^{2\pi} (t_r\,r\cos\varphi + m_{r\varphi}\sin\varphi - m_r\cos\varphi)\,r\,d\varphi &= M_0\,, \\ \int_0^{2\pi} (t_r\,r\sin\varphi - m_{r\varphi}\cos\varphi - m_r\sin\varphi)\,r\,d\varphi &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Mit dem Ansatz (6) erhält man die Spannungsresultanten aus (4) zu

$$\left.\begin{aligned} t_r &= -N\left(8\,A - \frac{2\,D}{r^2}\right)\cos\varphi\,, \\ m_r &= -\frac{N}{m}\left[m\left(6\,A\,r + \frac{2\,C}{r^3} + \frac{D}{r}\right) + 2\,A\,r - \frac{2\,C}{r^3} + \frac{D}{r}\right]\cos\varphi\,, \\ m_{r\varphi} &= (m-1)\,\frac{N}{m}\left(2\,A\,r - \frac{2\,C}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\sin\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (7) ein, so erkennt man, daß zur Befriedigung der Gleichgewichtsbedingungen die Festlegung einer einzigen Konstanten genügt. Man findet

$$D = \frac{M_0}{4\,\pi\,N}\,. \tag{9}$$

Weitere drei Randbedingungen ergeben sich auf Grund der Vorstellung, daß Innen- und Außenrand der Platte eben bleiben, wobei der Innenrand als Ganzes gegen den Außenrand um die x-Achse verdreht wird, also

$$\left.\begin{aligned} &1) \quad r = a: \quad w_0 = 0, \\ &2) \quad r = a: \quad \frac{\partial w_0}{\partial r} = 0, \\ &3) \quad r = b: \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial w_0}{r\,\partial\varphi}\sin\varphi = \frac{w_0}{r\cos\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Für die Konstanten erhält man so

$$A = -\frac{M_0}{8\pi N}\frac{1}{a^2+b^2}, \qquad B = \frac{M_0}{8\pi N}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - 2\ln a\right), \qquad C = \frac{M_0}{8\pi N}\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}. \tag{11}$$

Damit lautet die vollständige Lösung

$$w_0 = \frac{M_0}{8\pi N}\left[\frac{(a^2-r^2)(r^2+b^2)}{r(a^2+b^2)} + 2r\ln\frac{r}{a}\right]\cos\varphi. \tag{12}$$

Die Spannungen folgen durch Einsetzen in (3) zu

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{3}{\pi}\frac{M_0}{h^2 b}\left[\frac{r^4 b(3m+1) - r^2 b(a^2+b^2)(m+1) - a^2 b^3(m-1)}{2mr^3(a^2+b^2)}\right]\cos\varphi, \\ \sigma_\varphi &= \frac{3}{\pi}\frac{M_0}{h^2 b}\left[\frac{r^4 b(m+3) - r^2 b(a^2+b^2)(m+1) + a^2 b^3(m-1)}{2mr^3(a^2+b^2)}\right]\cos\varphi, \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{3}{\pi}\frac{M_0}{h^2 b}\left[\frac{m-1}{2m}\,\frac{b(a^2-r^2)(r^2-b^2)}{r^3(a^2+b^2)}\right]\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Dabei ist $z = h/2$ gesetzt; d. h. die Gleichungen (13) geben die Spannungen an der Plattenoberfläche an.

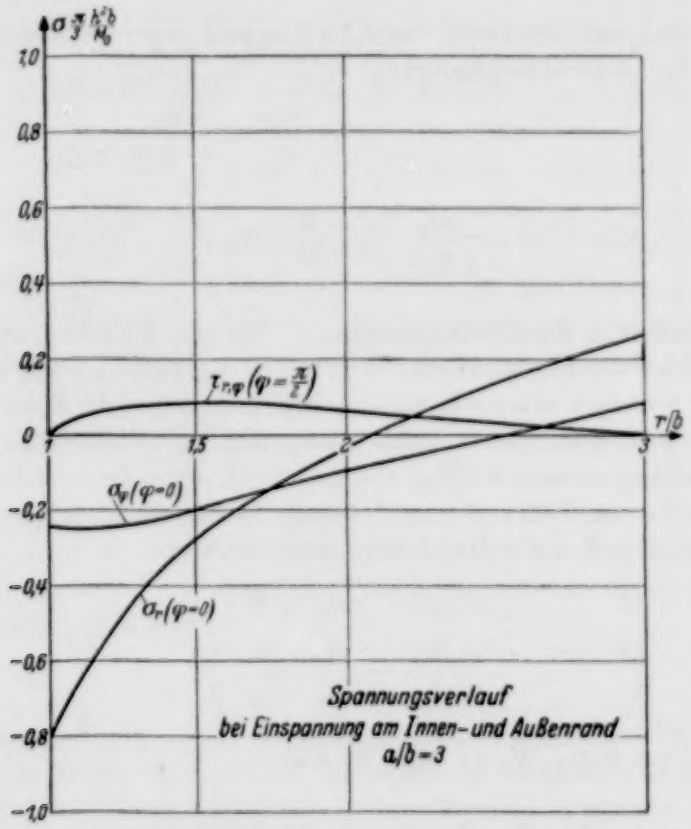


Abb. 4. Spannungsverlauf bei Einspannung am Innen- und Außenrand.

Abb. 4 zeigt den Verlauf der Spannungen für ein Verhältnis von Außen- zu Innenhalbmesser $a/b = 3$. Der Klammerausdruck ist dabei jeweils über dem Radienverhältnis r/b aufgetragen, für die *Poisson*sche Zahl wurde $m = 10/3$ eingesetzt. Der Kurvenverlauf ist auch für andere Werte des

Verhältnisses a/b charakteristisch. Man erkennt, daß der Höchstwert der Spannungen durch die Spannung σ_r am Innenrand gegeben ist:

$$\sigma_{max} = |\sigma_r|_{r=b} = \frac{3}{\pi} \frac{M_0}{h^2 b} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \tag{14}$$

Als auffällig ist zu vermerken, daß die *Poisson*sche Zahl in (14) nicht auftritt. Am gleichen Ort erhält man für die Spannung σ_φ

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{m} \sigma_r. \tag{15}$$

Aus beiden ist evtl. eine Vergleichsspannung zu bilden. Geht man von der *Mohr*schen Schubspannungstheorie aus, so ist (14) die für die Berechnung einer Kreisringplatte maßgebende Beziehung. Abb. 5 macht deutlich, wie die Beanspruchung einer Kreisringplatte vom Verhältnis a/b abhängt.

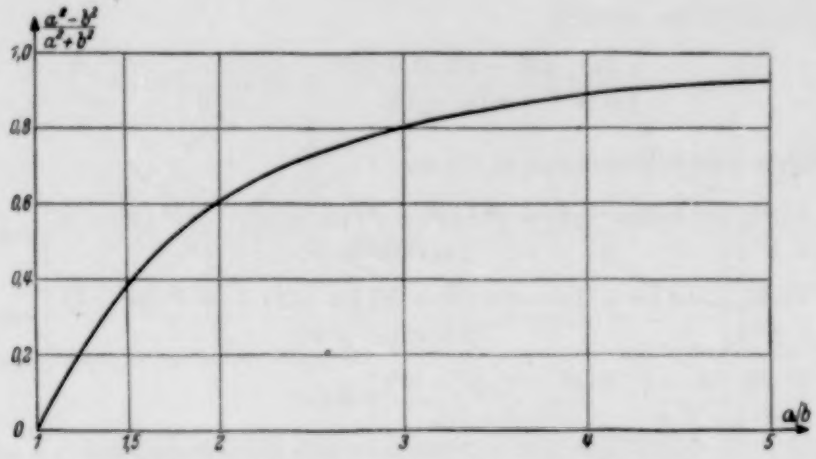


Abb. 5. Abhängigkeit der Beanspruchung vom Verhältnis a/b.

Der Betrag des Winkels α, um den Innen- und Außenrand gegeneinander verdreht werden, ergibt sich aus (12) aufgrund des Zusammenhanges

$$r = b, \qquad \alpha = \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{w_0}{r \cos \varphi} \tag{16}$$

zu

$$\alpha = \frac{M_0}{4 \pi N} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \ln \frac{b}{a} \right). \tag{17}$$

4. Lösungen bei veränderten Randbedingungen. a) Beide Ränder nicht eingespannt. Im praktisch gegebenen Fall ist die Einspannung der Kreisringplatte niemals vollkommen starr, sondern muß als mehr oder weniger elastisch angenommen werden. In diesem Zusammenhang interessiert daher die Frage nach dem Spannungszustand, der sich einstellt, wenn die Bedingung der Einspannung gänzlich fallengelassen wird.

Man kommt auch in diesem Fall zu einer Lösung, wenn man bei gleichem Ansatz die in den Gleichungen (10) formulierten Randbedingungen ersetzt durch

$$\left.\begin{aligned} &1) \quad r = a: \quad w_0 = 0, \\ &2) \quad r = a: \quad m_r = 0, \\ &3) \quad r = b: \quad m_r = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die Konstanten ändern jetzt ihren Wert. Man findet

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{M_0}{8 \pi N} \frac{m+1}{3m+1} \frac{1}{a^2 + b^2}, \\ B &= \frac{M_0}{8 \pi N} \left(\frac{m+1}{3m+1} \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{m+1}{m-1} \frac{b^2}{a^2 + b^2} - 2 \ln a \right), \\ C &= -\frac{M_0}{8 \pi N} \frac{m+1}{m-1} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

während D erhalten bleibt. Die vollständige Lösung für die Durchbiegungen lautet in diesem Fall

$$w_0 = \frac{M_0}{8\,\pi\,N}\left[\frac{m+1}{3\,m+1}\,\frac{(a^2-r^2)\,r}{a^2+b^2} - \frac{m+1}{m-1}\,\frac{(a^2-r^2)\,b^2}{(a^2+b^2)\,r} + 2\,r\ln\frac{r}{a}\right]\cos\varphi\,. \tag{20}$$

Für die Spannungen erhält man damit

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{3}{\pi}\,\frac{M_0}{h^2\,b}\left[\frac{m+1}{2\,m}\,\frac{b\,(r^2-a^2)\,(r^2-b^2)}{r^3\,(a^2+b^2)}\right]\cos\varphi\,,\\
\sigma_\varphi &= \frac{3}{\pi}\,\frac{M_0}{h^2\,b}\left[\frac{m+1}{2\,m}\left(\frac{m+3}{3\,m+1}\,\frac{r\,b}{a^2+b^2} - \frac{a^2\,b^3}{r^3\,(a^2+b^2)} - \frac{b}{r}\right)\right]\cos\varphi\,,\\
\tau_{r\varphi} &= \frac{3}{\pi}\,\frac{M_0}{h^2\,b}\left[\frac{m-1}{2\,m}\left(\frac{m+1}{m-1}\,\frac{a^2\,b^3}{r^3\,(a^2+b^2)} - \frac{m+1}{3\,m+1}\,\frac{r\,b}{a^2+b^2} + \frac{b}{r}\right)\right]\sin\varphi\,.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Ihr Verlauf ist aus Abb. 6 zu erkennen.

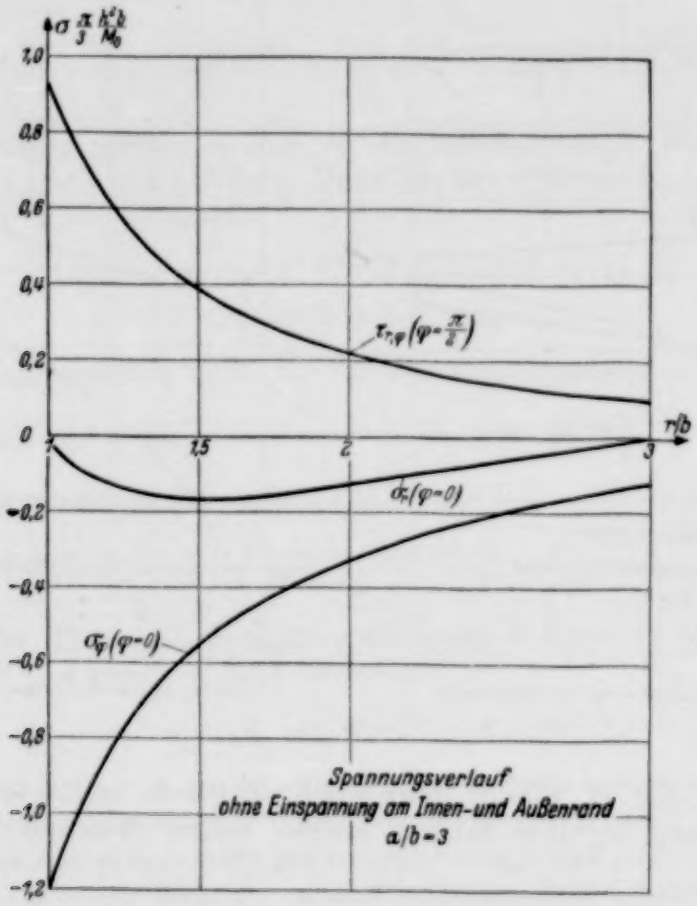


Abb. 6. Spannungsverlauf ohne Einspannung am Innen- und Außenrand.

Eine gewisse Schwierigkeit ergibt sich insofern, als die Schubspannungen am Innen- und Außenrand nicht zu Null werden. Dieses Problem besteht indessen immer, solange man von den Ansätzen der elementaren Plattentheorie ausgeht. Es gelingt nicht, am freien Plattenrand auch das Schermoment zum Verschwinden zu bringen. Man trifft daher die Annahme[1], daß das Schermoment am Rande durch eine geeignete Verteilung der Querkräfte ersetzt werden darf. Diese von *Kirchhoff* zuerst formulierte Beziehung lautet

$$q_r = t_r + \frac{\partial m_{r\varphi}}{r\,\partial\varphi}\,. \tag{22}$$

Man setzt dabei voraus, daß sich die damit verbundene Störung des Spannungszustandes entsprechend dem Prinzip von *de St. Venant* auf eine schmale Randzone beschränkt. Weiterhin ergibt sich aus Abb. 6, daß als für die Berechnung einer nicht eingespannten Kreisringplatte maßgebend die Schubspannung $\tau_{r\varphi}$ in der Nähe des Innenrandes anzusehen ist. Man erhält die Beziehung

$$\tau_{max} = \frac{3}{\pi}\,\frac{M_0}{h^2\,b}\,\frac{a^2\,(3\,m+1)+b^2\,(m-1)}{(3\,m+1)\,(a^2+b^2)}\,. \tag{23}$$

Mit (23) ist die Beanspruchung einer Kreisringplatte im ungünstigsten Fall gegeben.

[1] *A. Nadai*, Elastische Platten, S. 34. Berlin 1925.

Bei einem Vergleich mit (14) ist zu beachten, daß die maximalen Spannungen nicht an den gleichen Stellen des Innenrandes auftreten (Verlauf von Sinus- und Cosinusfunktion). Daher bedeutet eine in geringem Maße nachgiebige Einspannung noch keine Erhöhung der durch (14) gegebenen Beanspruchung.

b) Nur ein Rand eingespannt. Durch Variation der Randbedingungen in (10) und (18) erhält man weitere Lösungen für eine Kreisringplatte, die entweder nur am Innenrand oder nur am Außenrand eingespannt ist. Der Verlauf der Spannungen ist für diese Fälle in Abb. 7 und 8 dargestellt.

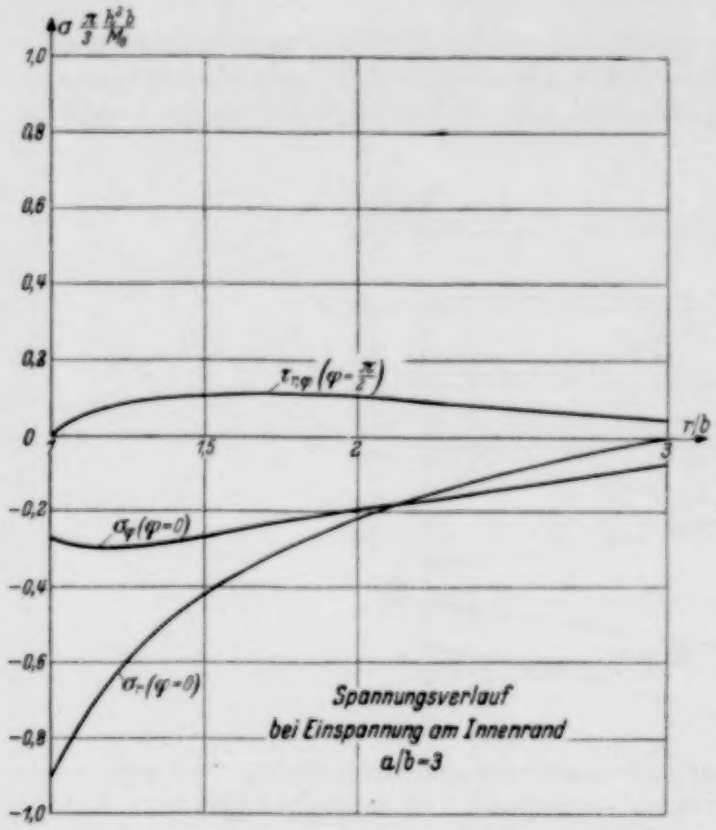


Abb. 7. Spannungsverlauf bei Einspannung am Innenrand.

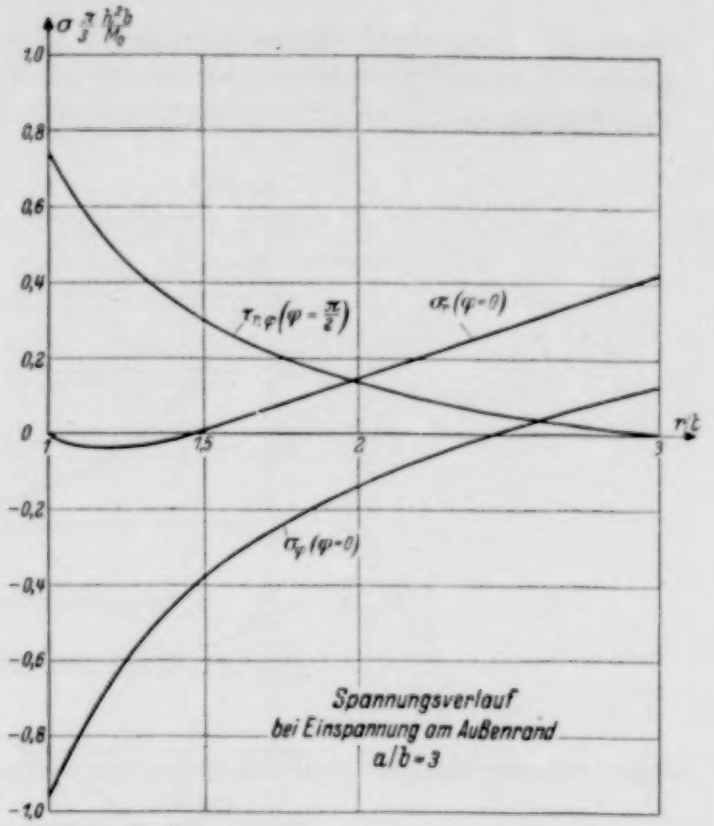


Abb. 8. Spannungsverlauf bei Einspannung am Außenrand.

Herrn Professor Dr.-Ing. *H. Rumpf* möchte ich an dieser Stelle für die Anregung und die Unterstützung der Arbeit herzlich danken, ebenso Herrn Professor Dr.-Ing. *R. Sonntag* für wichtige Hinweise.

Mitteilung aus dem Institut für Mechanische Verfahrenstechnik an der Technischen Hochschule Karlsruhe.

(Eingegangen am 18. Januar 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Jürgen Raasch*, Karlsruhe, Technische Hochschule, Institut für Mechanische Verfahrenstechnik.

Über die Stabilität der Präzessionsbewegung eines symmetrischen Kreisels

Von O. Bottema

1. Wir betrachten einen symmetrischen Kreisel, der sich um den auf der Symmetrieachse l gelegenen festen Punkt O drehen kann. Das Trägheitsmoment bezüglich l sei gleich C und für eine Achse durch O senkrecht auf l gleich A. Die Lage des Kreisels werde durch die drei *Euler*schen Winkel ϑ, ψ und φ in bezug auf ein rechtwinkliges raumfestes Koordinatensystem $OXYZ$ dargestellt; dabei ist ϑ der Winkel zwischen l und OZ und ψ derjenige zwischen der Ebene (l, OZ) und der X-Achse; $\dot{\varphi}$ ist die Eigendrehgeschwindigkeit um l. Für die kinetische Energie des Kreisels findet man

$$T = \frac{1}{2} A \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} (A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) \dot{\psi}^2 + C \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos \vartheta + \frac{1}{2} C \dot{\varphi}^2 . \tag{1}$$

Bezüglich der Kräfte, welche auf den Kreisel wirken, nehmen wir an, daß dieser eine potentielle Energie V besitzt, welche nur von ϑ abhängt. Dann hat das System die zwei zyklischen Koordinaten ψ und φ, und es gelten die Integrale

$$(A \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta) \dot{\psi} + C \dot{\varphi} \cos \vartheta = c_1 , \tag{2}$$

$$C \dot{\psi} \cos \vartheta + C \dot{\varphi} = c_2 , \tag{3}$$

wo c_1 und c_2 Integrationskonstanten sind. Für die dritte Bewegungsgleichung findet man

$$(A \ddot{\vartheta} - (A - C) \dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + C \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \vartheta + \frac{dV}{d\vartheta} = 0 . \tag{4}$$

oder, wenn man $\dot{\psi}$ und $\dot{\varphi}$ vermittels (2) und (3) eliminiert,

$$A \ddot{\vartheta} + \frac{(c_1 - c_2 \cos \vartheta)\ (c_2 - c_1 \cos \vartheta)}{A \sin^3 \vartheta} + \frac{dV}{d\vartheta} = 0 . \tag{5}$$

Der Kreisel führt eine Präzessionsbewegung aus wenn ϑ konstant bleibt. Ist $\vartheta = \alpha$ ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$) und $dV/d\vartheta$ für $\vartheta = \alpha$ gleich p, dann hat man

$$(c_1 - c_2 \cos \vartheta)(c_2 - c_1 \cos \vartheta) + A p \sin^3 \vartheta = 0 . \tag{6}$$

Der Ausdruck $(c_1 - c_2 \cos \vartheta)(c_2 - c_1 \cos \vartheta)$ ist eine nicht-definite homogene quadratische Funktion von c_1 und c_2; er kann also alle positiven und negativen Werte annehmen. Das heißt: es gibt immer (undenklich viele) Zahlen c_1 und c_2, welche bei vorgegebenen α und p die Gleichung(6) befriedigen. Oder: der Kreisel kann für jeden Wert $\vartheta = \alpha$ und in jedem konservativen Kraftfeld $V(\vartheta)$ Präzessionsbewegungen ausführen.

Aus (2) und (3) geht hervor, daß für eine solche Bewegung $\dot{\psi}$ und $\dot{\varphi}$ konstant sind. Man hat dabei

$$\dot{\psi} = \frac{c_1 - c_2 \cos \alpha}{A \sin^2 \alpha} . \tag{7}$$

Wenn wir noch den Wert $\omega \neq 0$ dieser Präzessionsgeschwindigkeit vorschreiben, dann ist

$$c_1 - c_2 \cos \alpha = A \omega \sin^2 \alpha ,$$

während aus (6) folgt

$$c_2 - c_1 \cos \alpha = - \frac{p \sin \alpha}{\omega} .$$

Man hat also

$$c_1 = \frac{1}{\omega \sin \alpha} (A \omega^2 \sin \alpha - p \cos \alpha) , \tag{8}$$

$$c_2 = \frac{1}{\omega \sin \alpha} (A \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - p) , \tag{9}$$

so daß c_1 und c_2 eindeutig bestimmt sind. Das heißt: bei vorgegebener V, α und ω gibt es immer eine wohlbestimmte Präzessionsbewegung.

2. Wenn V, α und ω gegeben sind, ist auch $\dot{\varphi}$ bestimmt. Aus (3) und (9) folgt

$$\dot{\varphi} = \frac{(A - C)\,\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha - p}{C\,\omega\sin\alpha}. \tag{10}$$

Dies ist eine gebrochene quadratische Funktion von ω; ihre Gestalt wird durch das Vorzeichen von $k = (A - C)\,p\sin\alpha\cos\alpha$ bestimmt. Für $k > 0$ nimmt $\dot{\varphi}$ bei veränderlichen ω jeden Wert von $-\infty$ bis $+\infty$ an. Ist jedoch $k < 0$, dann hat $\dot{\varphi}$ extreme Werte für $\omega^2 = -p^2/k$ und es ergibt sich die Ungleichung

$$\dot{\varphi}^2 > \frac{-4k}{C^2\sin^2\alpha}. \tag{11}$$

3. Wir wollen jetzt die Stabilität der Präzessionsbewegung untersuchen. Die Bewegungsgleichung (5) hat die Gestalt

$$A\,\ddot{\vartheta} + f(\vartheta) = 0, \tag{12}$$

wobei jetzt wegen (6) $f(\alpha) = 0$ ist. Schreibt man $\vartheta = \alpha + \varepsilon$, $f(\vartheta) = f(\alpha) + \varepsilon f'(\alpha) + \cdots$, dann gilt in der Nähe der Gleichgewichtslage $\varepsilon = 0$

$$A\,\ddot{\varepsilon} + f'(\alpha)\cdot\varepsilon = 0,$$

d. h. man hat Stabilität falls $f'(\alpha) > 0$ ist.

Die Präzessionsbewegung ist also stabil wenn

$$\sin^2\alpha\,(c_1^2 - 2\,c_1\,c_2\cos\alpha + c_2^2) - 3\cos\alpha\,(c_1 - c_2\cos\alpha)\,(c_2 - c_1\cos\alpha) + A\,q\sin^4\alpha > 0 \tag{13}$$

ist, wo q den Wert $d^2V/d\vartheta^2$ für $\vartheta = \alpha$ bedeuten soll, oder wenn wir c_1 und c_2 mittels (6), (8) und (9) eliminieren,

$$A^2\,\omega^4\sin^2\alpha + A\,\omega^2\sin\alpha\,(p\cos\alpha + q\sin\alpha) + p^2 > 0. \tag{14}$$

Führt man die neue Variable $u = \cos\vartheta$ ein, so daß V eine Funktion von u wird, dann ist

$$\frac{dV}{d\vartheta} = -\sin\vartheta\,\frac{dV}{du}, \qquad \frac{d^2V}{d\vartheta^2} = \sin^2\vartheta\,\frac{d^2V}{du^2} - \cos\vartheta\,\frac{dV}{du}.$$

Bezeichnet man dV/du und d^2V/du^2 für $\vartheta = \alpha$ mit P und Q dann lautet die Bedingung (14) noch etwas einfacher

$$F \equiv A^2\,\omega^4 + A\,\omega^2\,(-2\,P\cos\alpha + Q\sin^2\alpha) + P^2 > 0. \tag{15}$$

4. Die Diskriminante der in ω^2 quadratischen Funktion F ist

$$D = -A^2\sin^2\alpha\left(P + Q\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(P - Q\sin^2\frac{\alpha}{2}\right). \tag{16}$$

F ist positiv für jeden Wert von ω, also für jeden positiven Wert von ω^2, wenn F keine positiven Nullstellen hat. Dafür gibt es zwei, sich übrigens nicht ausschließende Möglichkeiten:

$$-2\,P\cos\alpha + Q\sin^2\alpha > 0 \tag{17}$$

und

$$\left(P + Q\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(P - Q\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) > 0. \tag{17'}$$

Im ersten Fall sind etwaige Nullstellen negativ, im zweiten Fall gibt es gar keine Nullstellen.

Man hat immer

$$\frac{-1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} < \frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} < \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{18}$$

Bezeichnen wir kurz

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = b_1, \qquad \frac{-1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = b_2, \qquad \frac{2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = b_3,$$

so ist

$$b_1 > 0, \qquad b_2 < 0, \qquad b_2 < b_3 < b_1.$$

In der (P, Q)-Ebene ziehen wir die Geraden L_i mit den Gleichungen $Q = b_i\,P$ (Abb. 1). In zwei von den durch L_1 und L_2 gebildeten Winkeln liegt die P-Achse, und innerhalb dieser Winkel ist offenbar die Ungleichung (17′) erfüllt. Innerhalb dieser zwei Winkel liegt auch die Gerade L_3. Die Ungleichung (17) wird erfüllt von den Punkten, die oberhalb von L_3 liegen. Das Gebiet, wo wenigstens eine der Ungleichungen (17) und (17′) gilt, ist in Abb. 1 schraffiert.

Wir haben also folgendes Ergebnis: Wenn der Kreisel für $\vartheta = \alpha\,(\alpha \neq 0, \alpha \neq \pi)$ eine Präzessionsbewegung ausführt, $V(u)$ die potentielle Energie darstellt, $u = \cos\vartheta$, $dV(\alpha)/du = P$ und $d^2V(\alpha)/du^2 = Q$ ist, dann ist die Bewegung für jede Präzessionsgeschwindigkeit ω stabil, falls $Q > 0$ und falls $Q = 0$, $P \neq 0$ und falls $Q < 0$, $\frac{P}{Q} > \sin^2\frac{\alpha}{2}$ und falls $Q < 0$, $\frac{P}{Q} < -\cos^2\frac{\alpha}{2}$ ist. Dagegen ist für $Q < 0$, $-\cos^2\frac{\alpha}{2} < \frac{P}{Q} < \sin^2\frac{\alpha}{2}$ die Bewegung nur dann stabil falls $\omega^2 < \omega_1^2$, oder $\omega^2 > \omega_2^2$ ist, wo ω_1^2 und ω_2^2 die (positiven) Nullstellen von F sind.

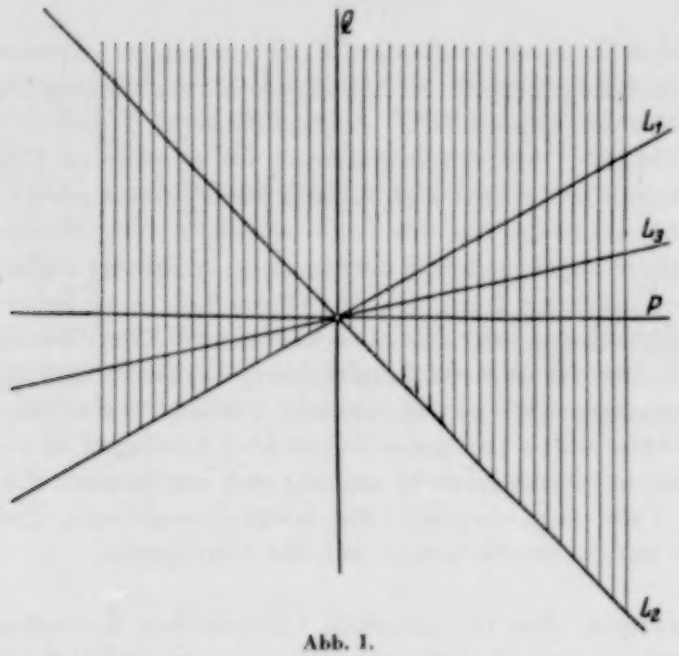


Abb. 1.

5. Bewegt sich der Kreisel unter Einfluß der Schwere, ist m seine Masse, S sein Schwerpunkt, $OS = h$ und OZ vertikal nach oben gerichtet, dann ist $V = m\,g\,h\,u$, also $P = m\,g\,h$, $Q = 0$, und es geht der bekannte Satz[1] hervor: Die Präzessionsbewegung ist immer stabil.

Man hat weiterhin $k = -m\,g\,h(A - C)\sin^2\alpha\cos\alpha$, und (11) sagt aus: Wenn $(A - C)\cos\alpha < 0$ ist, dann kann $\dot\varphi$ jeden Wert annehmen; ist dagegen $(A - C)\cos\alpha > 0$, dann ist bei der Präzessionsbewegung immer

$$\dot\varphi^2 > \frac{4\,(A - C)\,m\,g\,h\cos\alpha}{C^2}\,. \tag{19}$$

Als zweites Beispiel betrachten wir das Feld, wo die Kraft senkrecht auf der Z-Achse steht und mit dem Abstand r des Aufpunktes von der Z-Achse proportional ist. Das Potential ist $\frac{1}{2}\,a\,r^2$, wo a eine Konstante ist, und man hat also

$$V = \frac{1}{2}\,a\,(A\sin^2\vartheta + C\cos^2\vartheta)$$

und damit

$$\frac{dV}{du} = -\,a(A - C)\,u,\quad P = -\,a(A - C)\cos\alpha,\quad Q = -\,a(A - C)\,.$$

Aus den Bedingungen geht nun hervor: Für $a(A - C) > 0$ ist die Bewegung für jedes ω nur dann stabil, falls $\cos\alpha > \frac{1}{3}$ oder $\cos\alpha < -\frac{1}{3}$ ist, während für $a(A - C) < 0$ die Präzession immer für jedes ω stabil ist.

Für dieses Beispiel ist $k = (A - C)\,p\sin\alpha\cos\alpha = a\,(A - C)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; das heißt wegen (11): Falls $a > 0$ ist, unterliegt die Rotationsgeschwindigkeit $\dot\varphi$ keiner Bedingung; falls $a < 0$ ist, so muß

$$\dot\varphi^2 > \frac{-\,4\,a\,(A - C)^2\cos^2\alpha}{C^2}$$

sein.

(Eingegangen am 28. Januar 1960.)

Anschrift des Verfassers: Professor *Dr. O. Bottema*, Delft (Holland), Julianalaan 132.

[1] *R. Grammel*, Der Kreisel, 2. Aufl. Bd. 1, S. 96—97 und S. 240—243. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

Die Inversion der Torsionsspannungen prismatischer Stäbe in allgemeinen Koordinaten*

Von H.-J. Franeck

1. Einleitung. Allen elastizitätstheoretischen Untersuchungen prismatischer Körper, die einer Verdrehung unterworfen sind, liegen die *de St. Venant*schen Torsionsgleichungen für ein orthogonales kartesisches Koordinatensystem zugrunde[1]. In der folgenden Arbeit werden die Differentialbeziehungen der Torsionstheorie prismatischer Körper für allgemeine Koordinaten abgeleitet, wobei von den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie ausgegangen wird[2].

Für spezielle Koordinatensysteme hat die Torsionsdifferentialgleichung in der transformierten Form dasselbe Aussehen wie in kartesischen Koordinaten. In diesem Falle gelingt es, aus bekannten kartesischen Lösungen geschlossene Lösungen für Querschnitte zu berechnen. Die Tatsache der Invarianz der Differentialgleichung war für eine bestimmte Koordinatenbeziehung von *F. Levi-Civita*[3] und *J. H. Michell*[4] für die Bipotentialgleichung entdeckt und später von *A. Timpe*[5] und *W. Olszak*[6] für ebene Spannungsprobleme angewendet worden. Dabei machte es sich nachteilig bemerkbar, daß die dabei verwendete Inversion bekannter Lösungen in einer Abbildung innerhalb des kartesischen Koordinatensystems besteht und die sich ergebenden Resultate unter Umständen unübersichtlich werden. Faßt man dagegen die Inversion als eine Transformation in spezielle krummlinige Koordinaten auf, so vereinfachen sich die Ergebnisse.

2. Geometrische Grundlagen. Die rechtwinklig kartesischen Koordinaten eines Raumpunktes sind $\bar{x}^i, \bar{x}^j, \bar{x}^k, \bar{x}^q$, seine krummlinigen Koordinaten $x^\lambda, x^\mu, x^\nu, x^\sigma$, wobei die Indizes i, j, k, q bzw. $\lambda, \mu, \nu, \sigma$ jeweils an Stelle der Zahlen 1, 2, 3 stehen. Die kartesischen Koordinaten $\bar{x}^i$ seien differentiierbare Funktionen der allgemeinen Koordinaten x^λ und umgekehrt. Durch partielle Differentiation

$$\frac{\partial ( )}{\partial x^\lambda} = ( )_{|\lambda}\,, \qquad \frac{\partial ( )}{\partial \bar{x}^i} = ( )_{|i}$$

erhält man die Tangenten- bzw. Gradientenvektoren

$$c^i_\lambda = \bar{x}^i{}_{|\lambda}\,, \qquad c^\lambda_i = x^\lambda{}_{|i}\,.$$

Ihre nochmaligen Ableitungen werden mit

$$c^i_{\lambda\mu} = c^i_{\lambda|\mu}\,, \qquad c^\lambda_{i\mu} = c^\lambda_{i|\mu}$$

bezeichnet. Setzt man voraus, daß über zwei gleiche in einem Produkt vorkommende Indizes zu summieren ist, dann ergeben sich die Komponenten des Maßtensors in kovarianter bzw. kontravarianter Darstellung zu

$$g_{\lambda\mu} = c^i_\lambda\, c^i_\mu\,, \qquad g^{\lambda\mu} = c^\lambda_i\, c^\mu_i\,.$$

Die kovariante Ableitung eines Vektors wird durch einen langen senkrechten Strich gekennzeichnet und mit dem *Christoffel*schen Dreizeigersymbol

$$\Gamma^\mu_{.\sigma\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\mu}\,(g_{\lambda\sigma|\nu} + g_{\lambda\nu|\sigma} - g_{\sigma\nu|\lambda})$$

aus

$$A^\lambda{}_{|\mu} = A^\lambda{}_{|\mu} + A^\nu\, \Gamma^\lambda_{.\nu\mu}$$

berechnet.

---

* Auszug aus der gleichnamigen von der Bergakademie Freiberg genehmigten Dissertation; Referent Prof. Dr.-Ing. habil. *D. Rüdiger*; Korreferent Prof. Dr.-Ing. habil. *A. Kneschke*.

[1] Vgl. z. B. *C. Weber* und *W. Günther*, Torsionstheorie, 1. Aufl., Berlin 1958.

[2] Vgl. z. B. *E. A. Deuker*, Deutsche Mathematik 5 (1940/41), S. 94.

[3] *F. Levi-Civita*, Sopra una trasformazione in sè stessa della equazione $\Delta\Delta = 0$, Venezia 1898.

[4] *J. H. Michell*, Proc. Lond. M. Soc. 34 (1901/02), S. 134.

[5] *A. Timpe*, Z. Math. Phys. 52 (1905), S. 348.

[6] W. *Olszak*, Ing.-Arch. 6 (1935), S. 402.

Die technische Anwendung der Ergebnisse elastizitätstheoretischer Untersuchungen macht die Kenntnis der physikalischen Koordinaten von Tensoren erster und zweiter Stufe erforderlich. Man erhält für einen Vektor

$$A(\lambda) = \sqrt{g_{\lambda\lambda}}\, A^{\lambda} \qquad \text{(nicht summieren)},$$

während sich die physikalischen Koordinaten eines Tensors zweiter Stufe aus der Relation

$$A(\lambda\,\mu) = \sqrt{\frac{g_{\mu\mu}}{g_{\lambda\lambda}}}\, A^{\lambda\mu} \qquad \text{(nicht summieren)}$$

ergeben.

Für die Darstellung eines prismatischen Körpers mit beliebigem Querschnitt ist es zweckmäßig, die x^3-Linie der allgemeinen Koordinaten mit der $\bar{x}^3$-Achse eines kartesischen Koordinatensystems und der Stabachse zusammenfallen zu lassen. Dann wird der Stabquerschnitt $\bar{x}^3 = x^3 = \text{konst.}$ durch die ebenen krummlinigen Koordinaten x^1, x^2 beschrieben, und man erhält mit $\bar{x}^i = \bar{x}^i\,(x^1, x^2)$, $\bar{x}^3 = x^3$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1{,}2$ die Beziehungen

$$g^{\alpha 3} = g_{\alpha 3} = 0\,, \quad g^{33} = g_{33} = 1\,, \quad \Gamma^{\lambda}_{\cdot\mu 3} = \Gamma^{3}_{\cdot\lambda\mu} = 0\,, \quad A^{\lambda\mu}|_3 = A^{\lambda\mu}{}_{|3}\,.$$

3. Differentialgleichung der Verwölbungsfunktion. Die fünfzehn Gleichungen zur Berechnung des symmetrischen Spannungstensors $S^{\lambda\mu}$, des symmetrischen Deformationstensors $D^{\lambda\mu}$ und des Verschiebungsvektors V^{λ} können bei nicht vorhandener Massenkraft in der Form

$$S^{\lambda\mu}|_{\mu} = 0\,, \tag{1.1}$$

$$D^{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\,(V^{\lambda}|^{\mu} + V^{\mu}|^{\lambda})\,, \tag{1.2}$$

$$S^{\lambda\mu} = 2G\left(D^{\lambda\mu} + \frac{\nu}{1-2\nu}\, g^{\lambda\mu}\, D^{\sigma}_{\sigma}\right) \tag{1.3}$$

angeschrieben werden. Aus ihnen erhält man die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie

$$V^{\lambda}|^{\mu}_{\mu} + \frac{1}{1-2\nu}\, V^{\mu}|^{\lambda}_{\mu} = 0 \tag{2}$$

zur Bestimmung der drei Komponenten des Verschiebungsvektors.

Für das vorliegende Torsionsproblem erfolgt die Lösung dieses simultanen Differentialgleichungssystems mit dem Ansatz

$$V^{\lambda} = \vartheta\,[\delta^{\lambda}_{3}\,\varphi\,(x^1, x^2) - \varepsilon_{\alpha\beta}\, g^{\lambda\alpha}\, c^{\beta}_{i}\, \bar{x}^i\, x^3]\,. \tag{3}$$

Hierin sind ϑ eine vorerst beliebige Konstante, $\varphi\,(x^1, x^2)$ eine noch zu bestimmende Funktion und $\varepsilon_{\alpha\beta}$ der bekannte ebene ε-Tensor.

Mit dem Ansatz (3) erhält man unter Berücksichtigung des Satzes von *Ricci*

$$g^{\lambda\mu}|_{\nu} = g_{\lambda\mu}|_{\nu} = 0$$

für die kubische Dehnung

$$D^{\lambda}_{\lambda} = V^{\lambda}|_{\lambda} = 0\,.$$

Damit vereinfacht sich (2) zu

$$V^{\lambda}|^{\mu}_{\mu} = 0\,,$$

und es wird

$$\vartheta\,\delta^{\lambda}_{3}\,\varphi\,(x^1, x^2)|^{\mu}_{\mu} = 0\,. \tag{4}$$

Die Gleichungen (4) stellen drei Differentialgleichungen dar, die für $\lambda = \alpha$ identisch erfüllt sind, während sich für $\lambda = 3$ die Beziehung

$$\varphi(x^1, x^2)|^{\alpha}_{\alpha} = \Delta\varphi(x^1, x^2) = 0 \tag{5}$$

ergibt. Somit ist die Lösung der elastischen Grundgleichungen (2) auf die Integration der Potentialgleichung (5) zurückgeführt worden.

Um die Bedeutung der Konstanten ϑ zu untersuchen, wird die Winkeländerung $D(12)$ ermittelt. Man erhält

$$D(12) = \sqrt{\frac{g_{22}}{g^{11}}}\, D^{12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_{22}}{g^{11}}}\,(V^1|^2 + V^2|^1) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_{22}}{g^{11}}}\,(g^{2\lambda}\, V^1|_{\lambda} + g^{1\lambda}\, V^2|_{\lambda}) = 0\,,$$

und dieses Ergebnis gestattet es, die Formänderung eines Flächenteilchens in z. B. orthogonalen kartesischen Koordinaten nach Abb. 1 darzustellen. Hieraus liest man für kleine Verschiebungen

$$\sin\alpha = \alpha = \quad \overline{V}_{2|1}\,,$$

$$\sin\alpha = \alpha = -\,\overline{V}_{1|2}$$

ab und kann damit die Beziehungen

$$0 = \overline{V}_{1|2} + \overline{V}_{2|1}\,,$$

$$\alpha(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3) = -\frac{1}{2}\,\overline{\varepsilon}_{3\,i\,j}\,\overline{V}_{i|j}$$

bilden. Transformiert man diese Gleichungen in allgemeine Koordinaten, so entspricht die erste der verschwindenden Winkeländerung $D(12) = 0$, während sich für die zweite

$$\alpha(x^1, x^2, x^3) = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta}\,V^{\alpha}|^{\beta} \tag{6}$$

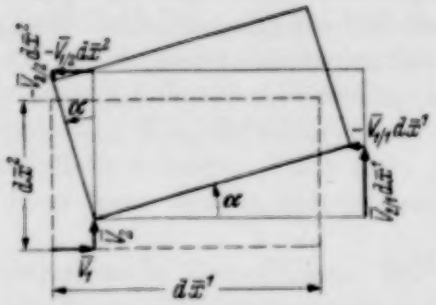


Abb. 1. Formänderung eines rechtwinkligen Flächenteilchens.

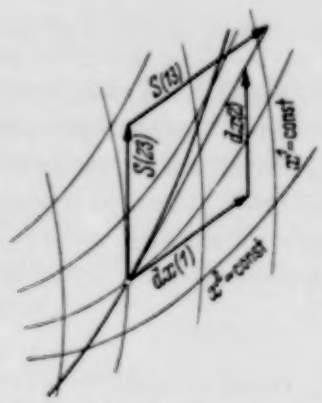


Abb. 2. Randbedingung für den Spannungsvektor am Querschnittsrand.

ergibt. Bei Beachtung der Rechenregel

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\gamma\delta} = \delta^{\alpha}_{\gamma}\,\delta^{\beta}_{\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}\,\delta^{\beta}_{\gamma}$$

folgt mit dem Ansatz (3) aus (6)

$$\alpha(x^1, x^2, x^3) = \alpha(x^3) = \vartheta\,x^3\,.$$

Die zunächst willkürliche Konstante ϑ ist also mit der Verwindung des Stabes

$$\vartheta = \frac{\alpha}{x^3}$$

identisch. Für die Komponenten des Spannungstensors $S^{\lambda\mu}$ erhält man

$$S^{11} = S^{22} = S^{12} = S^{33} = 0\,, \tag{7.1}$$

$$S^{3\alpha} = G\,\vartheta\,[\varphi(x^1, x^2)|^{\alpha} - \varepsilon^{\alpha\beta}\,c^{i}_{\beta}\,\overline{x}_i]\,. \tag{7.2}$$

Als Randbedingung muß für die Lösungen von (5) gefordert werden, daß die resultierende Spannung aus den physikalischen Komponenten des Spannungsvektors $S^{3\alpha}$ die Berandung des untersuchten Stabquerschnittes tangiert (Abb. 2).

Die Randbedingung lautet

$$\frac{dx(1)}{dx(2)} = \frac{S(31)}{S(32)}$$

und kann in der Form

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\,\varphi(x^1, x^2)|^{\alpha}\,dx^{\beta} = \frac{1}{2}\,d(\overline{x}_i\,\overline{x}^i) \tag{8}$$

angegeben werden.

4. Differentialgleichung der Spannungsfunktion. In kartesischen Koordinaten läßt sich jede Funktion $\varphi(\overline{x}^1, \overline{x}^2)$, die der *Laplace*schen Differentialgleichung $\Delta\varphi(\overline{x}^1, \overline{x}^2) = 0$ genügt, durch die *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\varphi(\overline{x}^1, \overline{x}^2)}{\partial\overline{x}^1} = \frac{\partial\psi(\overline{x}^1, \overline{x}^2)}{\partial\overline{x}^2}\,, \qquad \frac{\partial\varphi(\overline{x}^1, \overline{x}^2)}{\partial\overline{x}^2} = -\,\frac{\partial\psi(\overline{x}^1, \overline{x}^2)}{\partial\overline{x}^1}$$

eine zweite Funktion $\psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ so zuordnen, daß diese ebenfalls die *Laplace*sche Differentialgleichung erfüllt. Die Funktionen $\varphi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ und $\psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ sind Skalar- bzw. Vektorpotential eines ebenen *Laplace*schen Feldes, so daß man für dessen Feldvektor mit $\bar{\varepsilon}_{12} = -\bar{\varepsilon}_{21} = 1$

$$\bar{A}_i = \varphi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)_{|i} = \bar{\varepsilon}_{ij}\, \psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)_{|j} \tag{9}$$

schreiben kann. Der Vektor $\bar{A}_i$ ist nicht-normierter Gradientenvektor der Kurven der Kurvenschar $\varphi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \text{konst.}$ und gleichzeitig nicht-normierter Tangentenvektor der Kurven der Kurvenschar $\psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \text{konst.}$

Die Transformation von (9) in allgemeine Koordinaten liefert für die kovarianten bzw. kontravarianten Komponenten des Feldvektors

$$A_\alpha = \varphi(x^1, x^2)|_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\, g^{\beta\gamma}\, \psi(x^1, x^2)|_\gamma\,, \tag{10.1}$$

$$A^\alpha = \varphi(x^1, x^2)|^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\, \psi(x^1, x^2)|_\beta\,. \tag{10.2}$$

Als Randbedingung für die Funktion $\psi(x^1, x^2)$ erhält man aus (8)

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\, \varepsilon^{\alpha\gamma}\, \psi(x^1, x^2)|_\gamma\, dx^\beta = d\psi(x^1, x^2) = \frac{1}{2}\, d(\bar{x}^i\, \bar{x}_i)\,,$$

$$\psi(x^1, x^2) - \frac{1}{2}\, \bar{x}^i(x^1, x^2)\, \bar{x}_i(x^1, x^2) = \text{konst.} \tag{11}$$

Zur weiteren Berechnungsvereinfachung ist es vorteilhaft, eine Funktion $F(x^1, x^2)$ gemäß

$$F(x^1, x^2) = G\,\vartheta \left[\psi(x^1, x^2) - \frac{1}{2}\, \bar{x}^i\, \bar{x}_i\right] \tag{12}$$

einzuführen. Dann folgt mit den Beziehungen (10.2) aus (7.2) für die Komponenten des Spannungsvektors

$$S^{3\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\, F(x^1, x^2)|_\beta\,, \tag{13}$$

und ein Vergleich mit (10.2) zeigt, daß der Schubspannungsvektor $S^{3\alpha}$ in jedem Punkt des untersuchten Querschnittes Tangente an die Funktionen $F(x^1, x^2) = \text{konst.}$ ist, diese somit als Schubspannungslinien bezeichnet werden können. Gemäß (13) heißt die Funktion $F(x^1, x^2)$ dann Spannungsfunktion.

Bildet man weiterhin mit (7.2)

$$\varepsilon_{\beta\alpha}\, S^{3\alpha}|^\beta = \varepsilon_{\beta\alpha}\, G\,\vartheta\, [\varphi(x^1, x^2)|^\alpha - \varepsilon^{\alpha\gamma}\, c^i_\gamma\, \bar{x}_i]|^\beta\,,$$

so folgt wegen der Identität

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\, (\,)\,|^{\alpha\beta} = 0$$

die Beziehung

$$\varepsilon_{\beta\alpha}\, S^{3\alpha}|^\beta = 2\, G\,\vartheta\,.$$

Daraus erhält man mit (13)

$$F(x^1, x^2)|^\alpha_\alpha = \Delta F(x^1, x^2) = -2\, G\,\vartheta \tag{14}$$

als Differentialgleichung des Torsionsproblems für die Spannungsfunktion $F(x^1, x^2)$. Die Randbedingung wird nach (11) in der Form

$$F(x^1, x^2) = \text{konst.}$$

angeschrieben. Hat der untersuchte Querschnitt nur einen Rand, dann kann die Konstante zweckmäßig Null gesetzt werden.

5. Schnittgrößen des Stabquerschnittes. Die in jedem Querschnitt $\bar{x}^3 = x^3 = \text{konst.}$ wirkenden Schubspannungen $S^{3\alpha}$ können sowohl zu einem resultierenden Moment M als auch zu einer Querkraft $\bar{Q}^i$ zusammengefaßt werden. Mit den Beziehungen

$$dM = dM(3) = dM^3 = dM_3 = d\bar{M}\,,$$

$$df = df(3) = df^3 = df_3 = d\bar{f}$$

wird für das differentielle Moment

$$dM = \varepsilon_{\alpha\beta}\, c^\alpha_i\, \bar{x}^i\, S^{3\beta}\, df$$

erhalten. Unter Berücksichtigung des aus den beiden krummlinigen Koordinatenabschnitten dx^1 und dx^2 gebildeten Flächenteilchens

$$df = \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2$$

ergibt sich das über den gesamten Stabquerschnitt f wirkende Torsionsmoment zu

$$M = \iint_f \sqrt{g}\, \varepsilon_{\alpha\beta}\, c_i^\alpha\, \bar{x}^i\, S^{3\beta}\, dx^1\, dx^2 ,$$

und mit (7.2) und (13) erhält man

$$M = G\,\vartheta \iint_f \sqrt{g}\, [\varepsilon_{\alpha\beta}\, c_i^\alpha\, \bar{x}^i\, \varphi(x^1, x^2)|^\beta + \bar{x}^i\, \bar{x}_i]\, dx^1\, dx^2 ,$$

$$M = -\iint_f \sqrt{g}\, c_i^\alpha\, \bar{x}^i\, F(x^1, x^2)|_\alpha\, dx^1\, dx^2 .$$

Die an einem Flächenteilchen $d\bar{f}_3 = d\bar{f} = df$ wirkende Schubkraft $d\bar{Q}^i$ $(i = 1, 2)$ läßt sich in der Form

$$d\bar{Q}^i = \bar{S}^{3\,i} d\bar{f} = \sqrt{g}\, c_\alpha^i\, S^{3\alpha}\, dx^1\, dx^2$$

anschreiben. Es folgt

$$\bar{Q}^i = G\,\vartheta \iint_f \sqrt{g}\, [c_\alpha^i\, \varphi(x^1, x^2)|^\alpha - \varepsilon^{\alpha\beta}\, c_\alpha^i\, c_\beta^j\, \bar{x}_j]\, dx^1\, dx^2 ,$$

$$\bar{Q}^i = \int_f c_\alpha^i\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, F(x^1, x^2)|_\beta\, df = \iint_f \sqrt{g}\, c_\alpha^i\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, F(x^1, x^2)|_\beta\, dx^1\, dx^2 . \tag{15}$$

Bei Anwendung des *Stokes*schen Satzes

$$-\int_f c_\alpha^i\, \varepsilon^{\alpha\beta}\, (\,)|_\beta\, df = \oint_c (\,)\, d\bar{x}^i$$

auf die Beziehung (15) wird

$$\bar{Q}^i = -\oint_c F(x^1, x^2)\, d\bar{x}^i ,$$

und da die Spannungsfunktion $F(x^1, x^2)$ gemäß der geforderten Randbedingung entlang des Querschnittsrandes C konstant ist, ergibt sich

$$\bar{Q}^i = 0 .$$

6. Lösung der Torsionsdifferentialgleichung durch Inversion des Spannungszustandes. In kartesischen Koordinaten lauten die Potentialgleichungen der Torsionsuntersuchung für die Verwölbungsfunktion $\varphi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ und die Funktion $\psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$

$$\Delta\varphi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \varphi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)_{|11} + \varphi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)_{|22} = 0 , \tag{16.1}$$

$$\Delta\psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)_{|11} + \psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)_{|22} = 0 . \tag{16.2}$$

Die Funktionen $\varphi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ und $\psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ stellen den Real- bzw. Imaginärteil eines komplexen Torsionspotentials $\Phi(\bar{x}^1 + i\,\bar{x}^2)$ dar und sind durch die *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen miteinander verknüpft.

Gelingt es nun, durch die Wahl spezieller krummliniger Koordinatensysteme die Form der Differentialgleichung (16) auch nach ihrer Transformation in allgemeine Koordinaten invariant zu gestalten, so können Lösungen von (16) mit Vorteil zur Bestimmung neuer Torsionsquerschnitte herangezogen werden. In diesem Falle hat man lediglich für die Variablen $\bar{x}^i$ die allgemeinen Koordinaten x^α zu setzen und sichert damit die Erfüllung der Differentialgleichungen

$$\Delta\varphi(x^1, x^2) = 0 , \qquad \Delta\psi(x^1, x^2) = 0 .$$

Dieser Vorgang wird als Inversion des Spannungszustandes bezeichnet. Ebenso läßt sich die Inversion zwischen krummlinigen Koordinatensystemen untereinander oder von allgemeinen in kartesische Koordinatensysteme ausführen. Mit den auf diese Weise erhaltenen Lösungen $\psi(x^1, x^2)$ und $\varphi(x^1, x^2)$ kann nach (12) die Spannungsfunktion $F(x^1, x^2)$ ermittelt werden. Die Kurvenschar $F(x^1, x^2) = \text{konst.}$ liefert dann die Schubspannungslinien bzw. den Rand des Stabquerschnittes.

Für eine skalare Funktion $f(x^1, x^2)$ läßt sich die Differentialoperation $\Delta f(x^1, x^2)$ vorteilhaft in der Form

$$\Delta f(x^1, x^2) = f(x^1, x^2)|_\alpha^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} [\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\, f(x^1, x^2)_{|\beta}]_{|\alpha} \tag{17}$$

angeben. Soll obige Forderung nach Invarianz der Differentialgleichung erfüllt sein, dann dürfen nur solche krummlinigen Koordinatensysteme Verwendung finden, deren Maßtensoren den Bedingungen

$$g_{11} = g_{22} , \qquad g_{12} = 0 \tag{18}$$

genügen. Man erhält mit

$$g^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,g_{\gamma\delta}$$

hieraus

$$\sqrt{g}\,g^{11} = \sqrt{g}\,g^{22} = 1\,, \qquad \sqrt{g}\,g^{12} = 0\,,$$

und damit ergibt sich für den Ausdruck $\Delta f(x^1, x^2)$

$$\Delta f(x^1, x^2) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[f(x^1, x^2)_{|11} + f(x^1, x^2)_{|22}\right].$$

Nun sind sowohl die Verwölbungsfunktion $\varphi(x^1, x^2)$ als auch die Funktion $\psi(x^1, x^2)$ Lösungen der *Laplace*schen Differentialgleichung, so daß diese auch in allgemeinen Koordinaten in der Form

$$\varphi(x^1, x^2)_{|11} + \varphi(x^1, x^2)_{|22} = 0\,, \tag{19.1}$$

$$\psi(x^1, x^2)_{|11} + \psi(x^1, x^2)_{|22} = 0 \tag{19.2}$$

angegeben werden können. Damit ist für krummlinige, die Bedingungen (18) erfüllende Koordinatensysteme die Invarianz der *Laplace*schen Differentialgleichung (16) bei einer Transformation nachgewiesen.

Als Koordinatensysteme, die den Beziehungen (18) genügen, werden vier Beispiele angeführt:

A. Parabolische Koordinaten

$$\bar{x}^1 = \frac{(x^1)^2 - (x^2)^2}{2\,a}\,, \qquad \bar{x}^2 = \frac{x^1 x^2}{a}\,;$$

B. Kreiskoordinaten

$$\bar{x}^1 = a^2\,\frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}\,, \qquad \bar{x}^2 = -\,a^2\,\frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}\,;$$

C. Elliptische Koordinaten

$$\bar{x}^1 = a\cosh x^1 \cos x^2\,, \qquad \bar{x}^2 = a\sinh x^1 \sin x^2\,;$$

D. Bipolarkoordinaten

$$\bar{x}^1 = a\,\frac{\sinh x^1}{\cosh x^1 - \cos x^2}\,, \qquad \bar{x}^2 = -\,a\,\frac{\sin x^2}{\cosh x^1 - \cos x^2}\,.$$

7. Beispiele. Für die durch die Koordinatenbeziehungen

$$\bar{x}^1 = a^2\,\frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}\,, \qquad \bar{x}^2 = -\,a^2\,\frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}\,,$$

$$x^1 = a^2\,\frac{\bar{x}^1}{(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2}\,, \qquad x^2 = -\,a^2\,\frac{\bar{x}^2}{(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2}$$

beschriebenen Kreiskoordinaten wird die Lösung des auf der $\bar{x}^2$-Achse verschobenen Kreises in kartesischen Koordinaten invertiert. Sie lautet

$$\psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \overset{1}{c} + \overset{2}{c}\,\bar{x}^2\,, \qquad \varphi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \overset{3}{c} + \overset{2}{c}\,\bar{x}^1\,,$$

und man erhält durch Inversion

$$\psi(x^1, x^2) = \overset{1}{c} + \overset{2}{c}\,x^2\,, \qquad \varphi(x^1, x^2) = \overset{3}{c} + \overset{2}{c}\,x^1$$

als Lösungsfunktionen für einen Torsionsquerschnitt in orthogonalen Kreiskoordinaten. Die Spannungsfunktion ergibt sich dann nach (12) zu

$$F(x^1, x^2) = G\,\vartheta\left[\overset{1}{c} + \overset{2}{c}\,x^2 - \frac{1}{2}\,\frac{a^4}{(x^1)^2 + (x^2)^2}\right]$$

und kann nach Einführung einer neuen Konstanten η, einer neuen Funktion $K(x^1, x^2)$, dimensionsloser Koordinaten und eines Festwertes für $\overset{1}{c}$ gemäß

$$\overset{1}{c} = \frac{a^2}{2}\,, \qquad \overset{2}{c} = \frac{a}{8}\,\eta\,, \qquad K(x^1, x^2) = 1 - \frac{2\,F(x^1, x^2)}{G\,\vartheta\,a^2}\,, \qquad \xi^1 = \frac{x^1}{a}\,, \qquad \xi^2 = \frac{x^2}{a}$$

in der Form

$$K(\xi^1, \xi^2) + \frac{\eta}{4}\,\xi^2 - \frac{1}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} = 0 \tag{20}$$

angeschrieben werden. Diese Gleichung liefert für verschiedene Parameterwerte η eine Schar von Querschnittsrandkurven, für die $F(x^1, x^2) = 0$ und damit $K = 1$ gesetzt wird. In Abb. 3 sind die Randkurven für einige Parameterwerte dargestellt. Für $\eta = 0$ erhält man den Kreis.

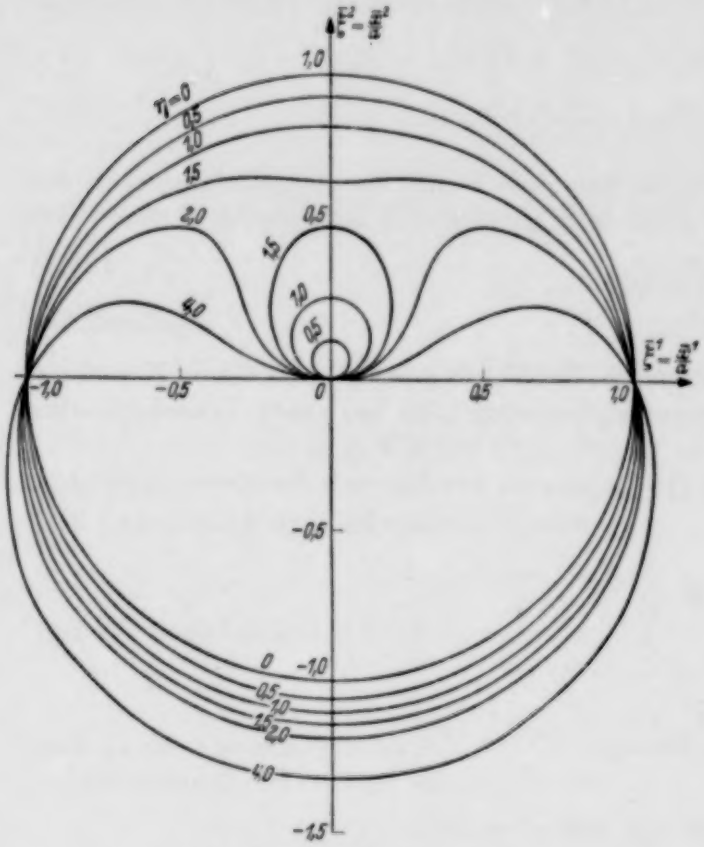


Abb. 3. Querschnittsrandkurven für $K = 1$.

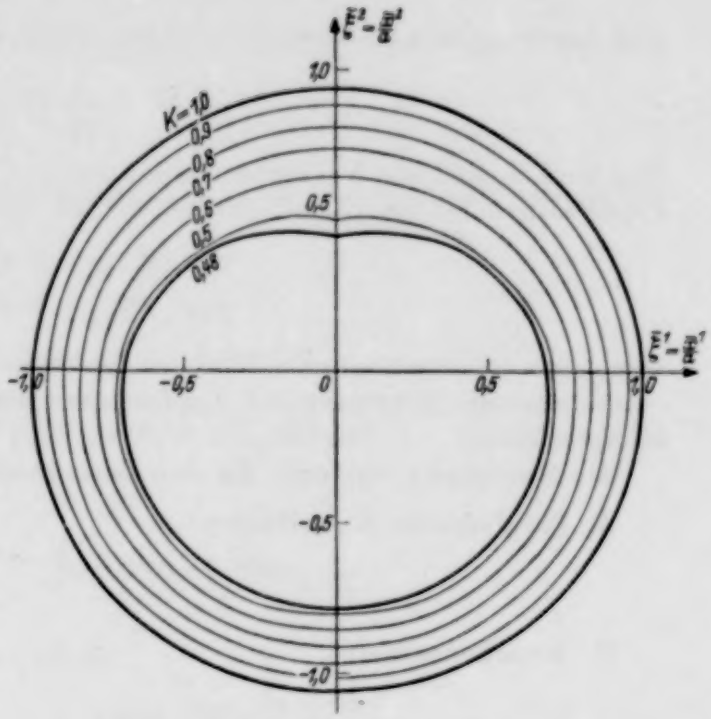


Abb. 4. Torsionsquerschnitt für $\eta = 0{,}5$.

Hat man aus dieser Kurvenschar eine spezielle Querschnittsform ausgewählt, dann ergibt (20) für $\eta =$ konst. die Schubspannungslinien für verschiedene Werte von K. Für $\eta = 0{,}5$ ist in Abb. 4 ein solcher Torsionsquerschnitt mit seinen Schubspannungslinien gezeichnet. Die physikalischen Koordinaten des Verschiebungs- und Schubspannungsvektors folgen mit $\overset{3}{c} = 0$ zu

$$V(1) = a^2\,\vartheta\,\frac{\xi^2\,\xi^3}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}, \qquad V(2) = -\,a^2\,\vartheta\,\frac{\xi^1\,\xi^3}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}, \qquad V(3) = a^2\,\vartheta\,\frac{\eta}{8}\,\xi^1,$$

$$S(31) = a\,G\,\vartheta\,\frac{1}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}\left\{\xi^2 + \frac{\eta}{8}\,[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]^2\right\},$$

$$S(32) = -\,a\,G\,\vartheta\,\frac{\xi^1}{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}.$$

Als zweites Beispiel wird eine Inversion von allgemeinen in kartesische Koordinaten durchgeführt. In parabolischen Koordinaten ist die Lösung $\psi(x^1, x^2)$ der *Laplace*schen Differentialgleichung zur Beschreibung elliptischer Querschnitte bekannt. Sie lautet

$$\psi\,(x^1, x^2) = \overset{1}{c} + \overset{2}{c}\,[(x^1)^4 - 6(x^1)^2\,(x^2)^2 + (x^2)^4],$$

und man erhält durch Inversion

$$\psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \overset{1}{c} + \overset{2}{c}[(\bar{x}^1)^4 - 6(\bar{x}^1)^2\,(\bar{x}^2)^2 + (\bar{x}^2)^4].$$

Die Spannungsfunktion kann in der Form

$$F(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = G\,\vartheta\left\{\overset{1}{c} + \overset{2}{c}\,[(\bar{x}^1)^4 - 6(\bar{x}^1)^2\,(\bar{x}^2)^2 + (\bar{x}^2)^4] - \frac{1}{2}\,[(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2]\right\}$$

angegeben werden. Setzt man

$$\overset{1}{c} = \frac{a^2}{2} - \overset{2}{c}\,a^4$$

und führt eine neue Konstante η und eine neue Funktion $K(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ gemäß

$$\overset{2}{c} = \frac{1}{4\,\eta\,a^2}\,, \qquad K(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = 1 + \frac{2\,\eta}{1-2\,\eta}\,\frac{2\,F(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}{G\,\vartheta\,a^2}\,,$$

ein, so wird

$$(1-2\,\eta)\,K\,(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2) - [(\bar{\xi}^1)^4 - 6(\bar{\xi}^1)^2\,(\bar{\xi}^2)^2 + (\bar{\xi}^2)^4] + 2\,\eta\,[(\bar{\xi}^1)^2 + (\bar{\xi}^2)^2] = 0\,. \tag{21}$$

In Abb. 5 ist für $K = 1$ $[F(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = 0]$ und verschiedene Parameterwerte η eine Schar von Kurven dargestellt, die als Berandung von Torsionsquerschnitten angesehen werden können.

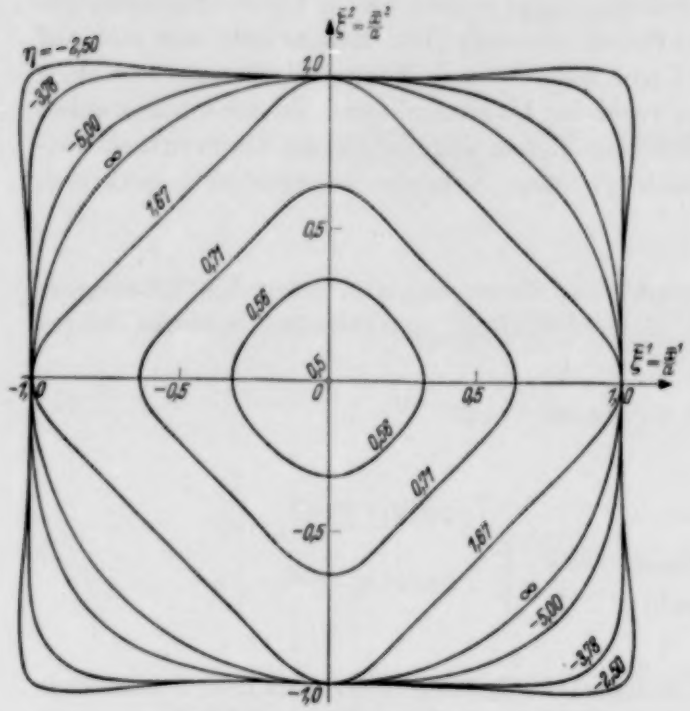


Abb. 5. Querschnittsrandkurven für $K = 1$.

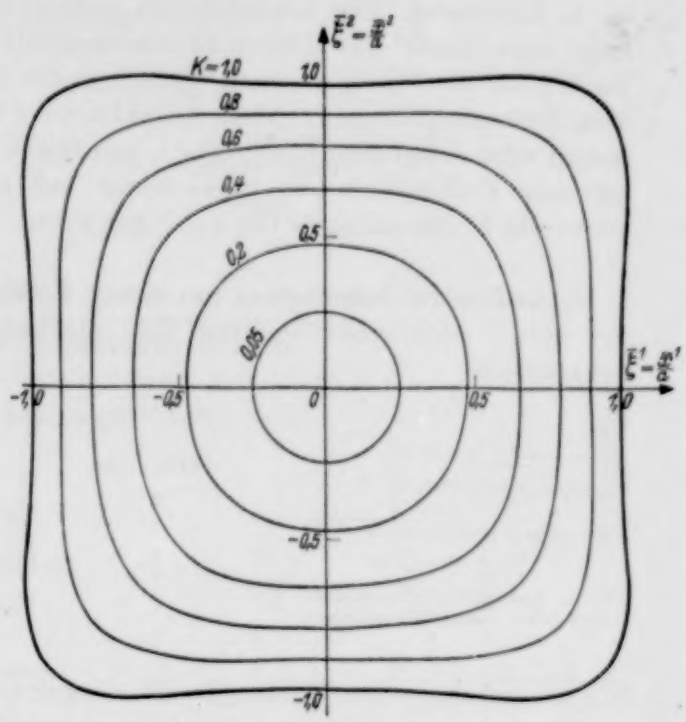


Abb. 6. Torsionsquerschnitt für $\eta = -2{,}63$.

Ein spezieller Stabquerschnitt ist samt seinen Schubspannungslinien für $\eta = -2{,}63$ in Abb. 6 wiedergegeben. Die zu der Funktion $\psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ gehörige Verwölbungsfunktion folgt zu

$$\varphi(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = -\frac{\bar{x}^1\,\bar{x}^2}{\eta\,a^2}\,[(\bar{x}^1)^2 - (\bar{x}^2)^2] + \overset{3}{c}\,,$$

und man erhält mit $\overset{3}{c} = 0$ die Komponenten des Verschiebungs- und Schubspannungsvektors aus

$$\bar{V}(1) = -\,a^2\,\vartheta\,\bar{\xi}^2\,\bar{\xi}^3\,, \quad \bar{V}(2) = a^2\,\vartheta\,\bar{\xi}^1\,\bar{\xi}^3\,,$$

$$\bar{V}(3) = \frac{a^2\,\vartheta}{\eta}\,\bar{\xi}^1\,\bar{\xi}^2\,[(\bar{\xi}^2)^2 - (\bar{\xi}^1)^2]\,.$$

$$\bar{S}(31) = a\,G\,\vartheta\left\{\frac{1}{\eta}\,[(\bar{\xi}^2)^2 - 3(\bar{\xi}^1)^2] - 1\right\}\bar{\xi}^2\,,$$

$$\bar{S}(32) = -\,a\,G\,\vartheta\left\{\frac{1}{\eta}\,[(\bar{\xi}^1)^2 - 3(\bar{\xi}^2)^2] - 1\right\}\bar{\xi}^1\,.$$

8. Zusammenfassung. Ausgehend von den Grundgleichungen der Elastizitätstheorie in allgemeinen Koordinaten werden durch einen speziellen Ansatz die Grundgleichungen der Torsionstheorie abgeleitet. Sowohl für eine Verwölbungs- als auch für eine Spannungsfunktion werden die partiellen Differentialgleichungen aufgestellt und die Randbedingungen angegeben. Für spezielle krummlinige Koordinatensysteme erhalten die Differentialgleichungen in allgemeinen Koordinaten dieselbe Form wie in kartesischen. Daher können bekannte Lösungen von einem Koordinatensystem in das andere invertiert werden und liefern neue geschlossene Lösungen des Torsionsproblems.

(Eingegangen am 3. Februar 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *H.-J. Franeck*, Dresden A 27, Regensburger Str. 9.

Klassifikation gedämpfter Schwingungssysteme und Eingrenzung ihrer Eigenwerte

Von S. Falk

1. Einleitung. Die Klassifikation gedämpfter Schwingungssysteme mit n Freiheitsgraden gelingt nach *Quade*[1] mit Hilfe der Elementarteiler der Polynommatrix (18). Beschränkt man sich auf positiv definite Energieformen, so gibt es für $n = 1$ nur drei, für $n = 2$ bereits vierzehn verschiedene Bewegungsvorgänge; ihre Anzahl wächst mit n rasch ins Unübersehbare. In der vorliegenden Arbeit wird daher eine Einteilung in nur fünf verschiedene Typen angegeben, die die eventuell auftretende Vielfachheit von Eigenwerten unberücksichtigt läßt. Nebenbei ergeben sich praktisch wertvolle Eingrenzungen für die Eigenwerte.

2. Gedämpfte Schwingung mit einem Freiheitsgrad.. Die Bewegungsgleichung des Schwingers der Abb. 1 oder eines anderen, ihm mechanisch oder elektrisch äquivalenten Systems lautet bekanntlich

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + c = 0\,. \tag{1}$$

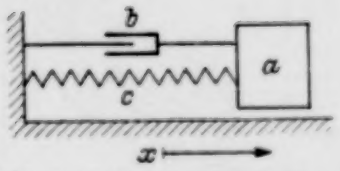


Abb. 1. Gedämpftes Schwingungssystem, mit einem Freiheitsgrad.

Dabei ist

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Masse } a & \text{positiv reell}, \\ \text{Dämpfungszahl } b, & \\ \text{Federzahl } c & \text{beliebig reell}. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Nur a wird als positiv vorausgesetzt. Negatives b bedeutet Anfachung, negatives c wird zum Beispiel mit $c = -a\,\omega^2$ bei Vorhandensein von Zentrifugalkräften mechanisch verwirklicht.

Der Lösungsansatz

$$x(t) = e^{\lambda t} \tag{3}$$

führt auf die charakteristische Gleichung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{4}$$

oder wegen $a \neq 0$ auf

$$\lambda^2 + B\lambda + C = 0\,, \tag{5}$$

$$-\lambda^2 = B\lambda + C \tag{6}$$

mit den Quotienten

$$B = \frac{b}{a}\,, \quad C = \frac{c}{a}\,. \tag{7}$$

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung (5) sind

$$\lambda_{1,2} = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} - C}\,. \tag{8}$$

Damit lautet die Lösung von (1)

a) für komplexe Wurzeln $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\,\omega$

$$x(t) = e^{\alpha t}\,(K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t) \tag{9}$$

b) für reelle Wurzeln λ_1, λ_2

$$x(t) = K_1\, e^{\lambda_1 t} + K_2\, e^{\lambda_2 t} \tag{10}$$

mit beliebigen Integrationskonstanten K_1 und K_2.

Nach (5) bis (8) gibt es einen „Kennpunkt" P in einer (B, C)-Ebene, der den Bewegungsablauf eindeutig charakterisiert, und zwar wollen wir nach Abb. 2 (in der das Wort „alle" vorläufig-

[1] Ing.-Arch. 6 (1935), S. 15.

durch „beide" zu ersetzen ist) die folgenden fünf Bewegungstypen unterscheiden (siehe auch Abb. 3).

	Schwingen	Kriechen	
gedämpft	Typ I, stabil	Typ II, stabil	Typ V, instabil
angefacht	Typ III, instabil	Typ IV, instabil	

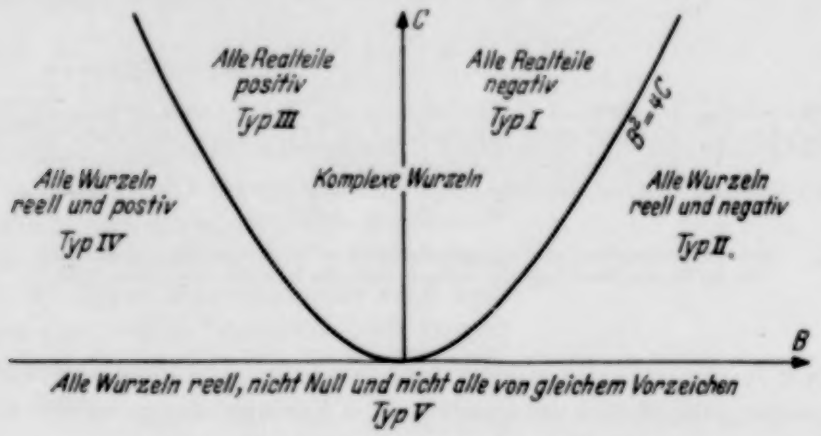


Abb. 2. Aufteilung der (B, C)-Ebene in fünf Bereiche.

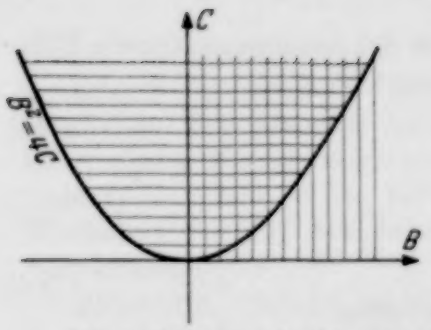
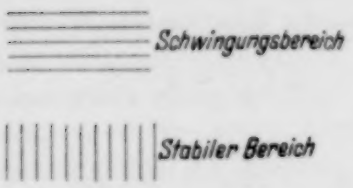


Abb. 3. Schwingungsbereich und stabiler Bereich in der (BC)-Ebene.



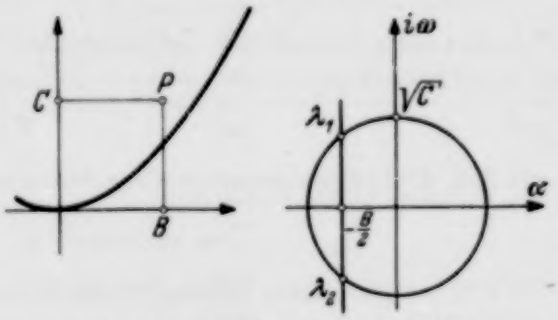


Abb. 4. Zeichnerische Ermittlung eines komplexen Wurzelpaares mit Hilfe des Kennpunktes P.

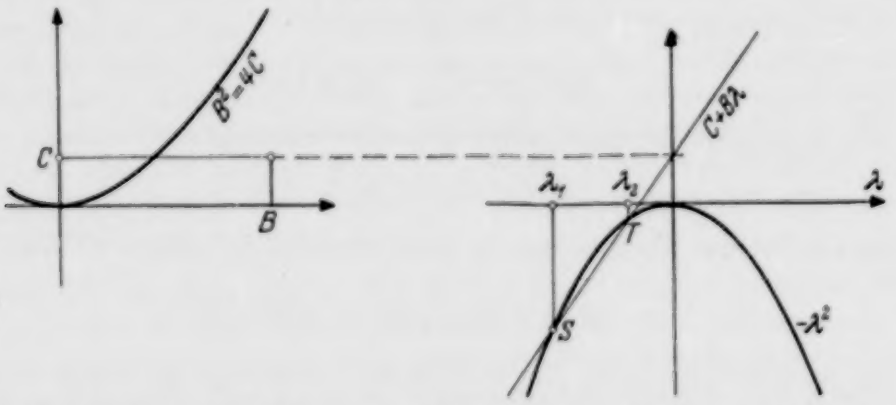


Abb. 5. Zeichnerische Ermittlung eines reellen Wurzelpaares mit Hilfe des Kennpunktes P.

Eine Bewegung heißt stabil, wenn die Koordinate $x(t)$ für beliebige Anfangsbedingungen und beliebig große Werte von t beschränkt bleibt, d. h. also für durchweg negative Realteile der Wurzeln λ. Wir sagen kurz:

„Nur der erste Quadrant der (B, C)-Ebene ist stabil."

Die Wurzeln selbst findet man mit Hilfe des Kennpunktes P nach (7) und den *Vieta*schen Wurzelsätzen

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -D\,, \tag{11}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = C\,, \tag{12}$$

auf folgende Weise:

a) Komplexe Wurzeln: der Kreis mit dem Halbmesser $\sqrt{C}$ um den Nullpunkt der komplexen Zahlenebene schneidet die Vertikale durch den Punkt $\alpha = -B/2$ in den beiden gesuchten Werten λ_1 und λ_2 (Abb. 4.)

b) Reelle Wurzeln. Nach (6) schneidet die Gerade $y_1 = B\lambda + C$ die Parabel $y_2 = -\lambda^2$ in zwei Punkten S und T, deren Abszissen die gesuchten Wurzeln λ_1 und λ_2 sind (Abb. 5).

3. Gedämpfte Schwingungen mit n Freiheitsgraden. Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir ein beliebiges gedämpftes Schwingungssystem mit n Freiheitsgraden (Abb. 6). Bei hinreichend

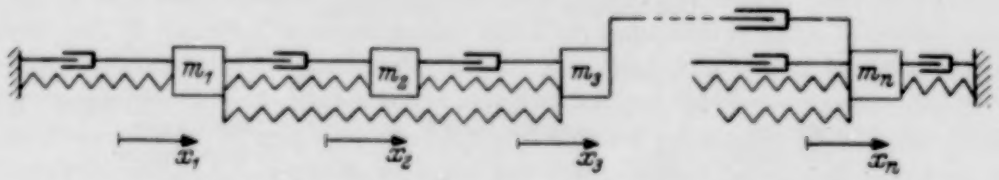


Abb. 6. Gedämpftes Schwingungssystem mit n Freiheitsgraden, schematisch. In der entspannten Lage des Systems sind alle Koordinaten gleich Null.

kleinen Auslenkungen lassen sich kinetische und potentielle Energie sowie die „Zerstreuungsfunktion" F der Dämpfung darstellen als quadratische Formen der gewählten Koordinaten x_i bzw. ihrer zeitlichen Ableitungen $\dot{x}_i$; in Formeln:

$$2E = \dot{\mathfrak{x}}' \mathfrak{A} \dot{\mathfrak{x}}, \quad 2F = \dot{\mathfrak{x}}' \mathfrak{B} \dot{\mathfrak{x}}, \quad 2\Phi = \mathfrak{x}' \mathfrak{C} \mathfrak{x}. \tag{13}$$

Wendet man hierauf die *Lagrange*sche Methode an, so bekommt man das homogene lineare Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten[1]

$$\mathfrak{A} \ddot{\mathfrak{x}} + \mathfrak{B} \dot{\mathfrak{x}} + \mathfrak{C} \mathfrak{x} = 0 \tag{14}$$

mit den drei reellsymmetrischen Matrizen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Trägheitsmatrix} & \mathfrak{A} \\ \text{Dämpfungsmatrix} & \mathfrak{B} \\ \text{Federmatrix} & \mathfrak{C} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \text{positiv definit}, \\ \text{Rang und Signatur beliebig} \end{array}\right\} \tag{15}$$

und dem Koordinatenvektor

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n). \tag{16}$$

Der Ansatz

$$\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{y}\, e^{\lambda t}, \quad \mathfrak{y} = \text{konst}. \tag{17}$$

führt auf das lineare homogene Gleichungssystem n-ter Ordnung

$$(\mathfrak{A}\lambda^2 + \mathfrak{B}\lambda + \mathfrak{C})\,\mathfrak{y} = 0. \tag{18}$$

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein nichttrivialer Lösungen ist das Verschwinden der Determinante

$$|\mathfrak{A}\lambda^2 + \mathfrak{B}\lambda + \mathfrak{C}| \equiv p(\lambda) = 0, \tag{19}$$

und diese Gleichung ist vom Grade $2n$. Das System (18) ist lösbar für jede ihrer $2n$ Wurzeln, und für jede einfache von ihnen gibt es genau eine Eigenbewegung von der Form

$$\mathfrak{x}_i(t) = \mathfrak{y}_i\, e^{\lambda_i t}. \tag{20}$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen (14) mit $2n$ willkürlichen Integrationskonstanten läßt sich stets aus $2n$ Eigenbewegungen linear kombinieren; doch treten bei Mehrfachwurzeln von (19) außer Eigenbewegungen der Form (20) auch solche der Form (30) auf.

4. Der Wertebereich der Kennpunkte. Um möglichst allgemein zu bleiben, wollen wir die drei Matrizen (15) nicht nur als reellsymmetrisch, sondern sogar komplex hermitesch zulassen, d. h. es gelte

$$\overline{\mathfrak{A}}' = \mathfrak{A} \text{ positiv definit}, \quad \overline{\mathfrak{B}}' = \mathfrak{B}, \quad \overline{\mathfrak{C}}' = \mathfrak{C}, \tag{21}$$

[1] *R. Zurmühl*, Matrizen 1958, S. 431, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1958.

wo Querstriche Übergang zu konjugiert komplexen Werten bedeuten. Multiplikation der Gleichung (18) von links mit $\bar{\mathfrak{y}}'$ ergibt

$$\bar{\mathfrak{y}}'(\mathfrak{A}\lambda^2 + \mathfrak{B}\lambda + \mathfrak{C})\,\mathfrak{y} \equiv a\lambda^2 + b\lambda + c = 0\,. \tag{22}$$

Da $\mathfrak{A}$ definit ist, die zugehörige hermitesche Form a also nicht verschwinden kann, dürfen wir dividieren und bekommen

$$\lambda^2 + B\lambda + C = 0\,, \tag{23}$$

und das ist genau die Gleichung (5) mit den beiden *Rayleigh*-Quotienten

$$B = \frac{\bar{\mathfrak{y}}'\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{y}}{\bar{\mathfrak{y}}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{y}}\,, \quad C = \frac{\bar{\mathfrak{y}}'\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{y}}{\bar{\mathfrak{y}}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{y}}\,, \tag{24}$$

die für $n = 1$ in die Kenngrößen (7) übergehen. Zwar sind uns die Eigenvektoren $\mathfrak{y}_i$, mit denen die Quotienten (24) und damit die Kennpunkte P_i der zugehörigen Eigenbewegungen zu berechnen sind, unbekannt; doch liegen diese *Rayleigh*-Quotienten jedenfalls innerhalb der Wertebereiche der Matrizenpaare $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$. Diese Wertebereiche sind nach den Voraussetzungen (21) reelle Strecken, und es gilt, wenn wir die Eigenwerte β und γ der Paare $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ der Größe nach ordnen,

$$\beta_1 = B_{min} \leqq B \leqq B_{max} = \beta_n\,, \tag{25}$$

$$\gamma_1 = C_{min} \leqq C \leqq C_{max} = \gamma_n\,. \tag{26}$$

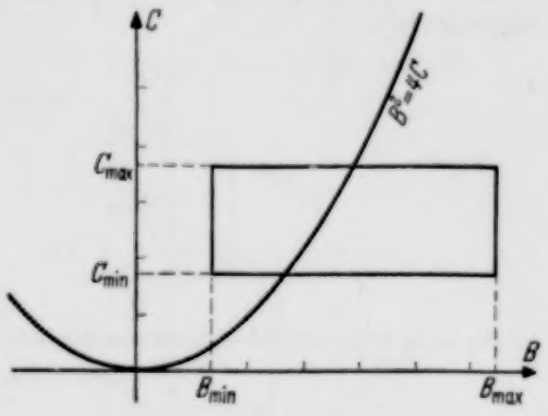


Abb. 7. Kennbereich in der (B, C)-Ebene für positiv definite Matrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

Damit haben wir in der (B, C)-Ebene einen rechteckigen Kennbereich, innerhalb dessen die Kennpunkte P_i aller möglichen Eigenbewegungen liegen müssen (Abb. 7). Liegt dieser Kennbereich ganz innerhalb eines der fünf Gebiete der Abb. 2, so läßt sich ohne Kenntnis der Wurzeln λ der Typ des Schwingungssystems eindeutig bestimmen.

Ehe wir die Abb. 2 aus Abschnitt **2** übernehmen, müssen wir allerdings noch zeigen, daß beim Typ V nicht alle reellen Wurzeln vom gleichen Vorzeichen sein können. Für $n = 1$ war das trivial, da ja das Produkt der beiden Wurzeln gleich C ist [Gleichung (12)], und C ist im Bereich V negativ. Der Beweis für beliebiges n ist umständlich und sei hier unterdrückt. Keinesfalls kann man ihn dadurch erbringen, daß man allein die Gleichung (23) heranzieht, die ja auf jeden Fall eine negative und eine positive reelle Wurzel besitzt (woraus dann sogar folgen würde, und übrigens bei entkoppelbaren Systemen auch tätsachlich folgt, daß genau n Wurzeln positiv und n negativ sind); denn wohl hat die mit einem Eigenvektor $\mathfrak{y}_i$ aufgestellte quadratische Gleichung (23) als Wurzel den zugehörigen Eigenwert λ_i, ob aber die andere Wurzel Λ_i dieser Gleichung ebenfalls Eigenwert ist, steht dahin und kann ohne Einblick in die Struktur der Polynommatrix (18) nicht entschieden werden.

5. Der Wertebereich der Eigenwerte. Die Abb. 4 und 5 zeigten, wie man durch eine einfache Konstruktion aus dem Kennpunkt P das zugehörige Wurzelpaar λ_1, λ_2 bekommt. Man überlegt sich nun leicht, daß bei gegebenem rechteckigem Kennbereich die gleiche Konstruktion nur für die vier Eckpunkte durchzuführen ist. Damit gewinnt man die folgenden beiden Aussagen:

a) Komplexe Wurzeln (C positiv): Der Kreisring mit den Halbmessern $\sqrt{C_{min}}$ und $\sqrt{C_{max}}$ um den Nullpunkt der komplexen Zahlenebene hat mit dem durch die beiden Abszissen $-B_{min}/2$ und $-B_{max}/2$ begrenzten vertikalen Streifen ein (eventuell in zwei zur reellen Achse spiegelbildlich gelegene Teile zerfallendes) Gebiet gemeinsam, in dem sämtliche komplexen Wurzeln der Gleichung (19) zu finden sind (Abb. 8).

b) Reelle Wurzeln: Die vier Halbgeraden

$$y = \lambda\, B_{min}^{max} + C_{min}^{max} \tag{27}$$

schneiden die Parabel $y = -\lambda^2$ in vier (oder zwei) reellen Punkten, deren Abszissen E, F; G, H (bzw. E, F) die beiden Wertebereiche (bzw. den Wertebereich) der reellen Wurzeln der Gleichung (19) begrenzen (Abb. 9).

Nun wird man die Wertebereiche der Matrizenpaare $\mathfrak{B}, \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}, \mathfrak{A}$ nicht immer exakt angeben können. Da sich aber bei Vergrößerung des Kennbereiches in der (B, C)-Ebene auch der Wurzelbereich in der komplexen Zahlenebene vergrößert, genügen auch äußere Schranken für B und C. Solche Schranken findet man zum Beispiel am einfachsten mit Hilfe der Umformung

$$B = \frac{\dfrac{\bar{\mathfrak{y}}' \mathfrak{B} \mathfrak{y}}{\bar{\mathfrak{y}}' \mathfrak{y}}}{\dfrac{\bar{\mathfrak{y}}' \mathfrak{A} \mathfrak{y}}{\bar{\mathfrak{y}}' \mathfrak{y}}} = \frac{b}{a}, \tag{28}$$

$$C = \frac{\dfrac{\bar{\mathfrak{y}}' \mathfrak{C} \mathfrak{y}}{\bar{\mathfrak{y}}' \mathfrak{y}}}{\dfrac{\bar{\mathfrak{y}}' \mathfrak{A} \mathfrak{y}}{\bar{\mathfrak{y}}' \mathfrak{y}}} = \frac{c}{a}; \tag{29}$$

denn hier lassen sich die drei *Rayleigh*-Quotienten a, b und c stets mit minimalem Rechenaufwand eingrenzen[1].

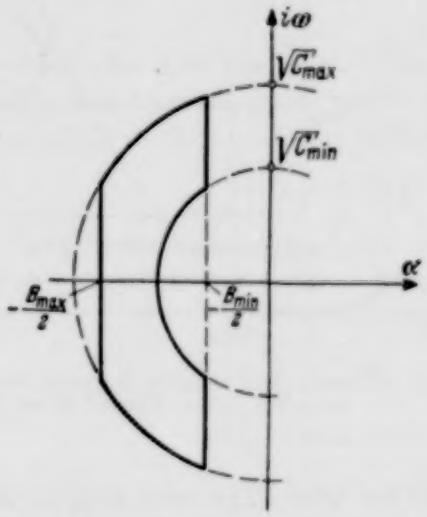


Abb. 8. Zeichnerische Ermittlung des komplexen Wurzelbereiches mit Hilfe der vier Eckwerte des Kennbereiches.

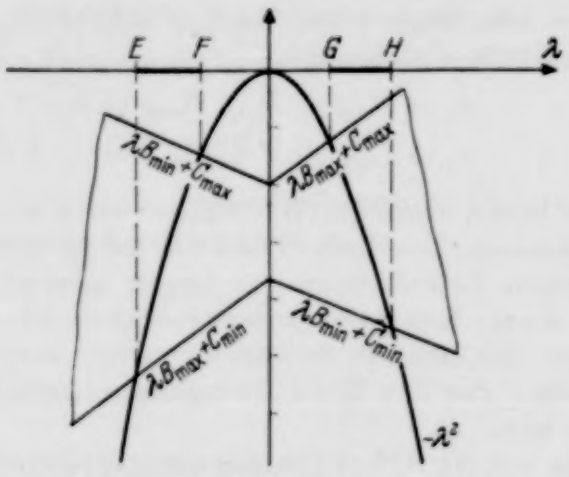


Abb. 9. Zeichnerische Ermittlung des reellen Wurzelbereiches mit Hilfe der vier Eckwerte des Kennbereiches.

6. Stabilitätsfragen. Zu einem q-fachen Eigenwert $\hat{\lambda}$ gehört als Verallgemeinerung von (20) die Eigenbewegung

$$\mathfrak{x}(t) = (\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{y}_1 t + \mathfrak{x}_2 t^2 + \cdots + \mathfrak{y}_s t^s) e^{\lambda t} \qquad (s \leqq q-1). \tag{30}$$

Schon bei einem Freiheitsgrad und reeller Doppelwurzel tritt uns diese Erscheinung in ihrer allereinfachsten Form als sogenannter aperiodischer Grenzfall entgegen. Der Koordinatenvektor (30) wächst unbegrenzt an für positive Realteile von λ, aber auch für $\lambda = 0$ und λ rein imaginär. Um also ganz sicher zu gehen, schließen wir die beiden den ersten Quadranten begrenzenden Halbachsen vom stabilen Bereich aus und haben im Hinblick auf Abb. 2 und als Verallgemeinerung der Aussage des Abschnittes **2**:

„Der erste Quadrant der (B, C)-Ebene unter Ausschluß der beiden begrenzenden Halbachsen ist der einzige Bereich, in dem sämtliche Eigenbewegungen stabil sind."

Und weiter, da nur für negativ definite Federmatrix $\mathfrak{C}$ der *Rayleigh*-Quotient C durchweg negativ ist (Typ V):

„Bei negativ definiter Federmatrix $\mathfrak{C}$ sind alle Eigenbewegungen von kriechendem Verhalten, und zwar ist mindestens eine von ihnen stabil und mindestens eine instabil."

Dieser Satz ist auf den ersten Blick überraschend, leuchtet aber ein für $n = 1$. Hier übersieht man sofort, daß der Massenpunkt im Zentrifugalkraftfeld in den Nullpunkten hineinkriechen und dort für $t \to \infty$ liegen bleiben kann, einerlei, ob die Bewegung angefacht oder gedämpft ist.

7. Feder- und Dämpfungsmatrix sind positiv definit. Der praktisch weitaus wichtigste Fall ist der positiv definiter Matrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. ($\mathfrak{A}$ ist stets positiv definit.) Der Kennbereich liegt jetzt

[1] *R. Zurmühl*, Matrizen, S. 203—210.

ganz im ersten Quadranten (Abb. 7), es kommen allein die Typen I und II in Betracht, alle Eigenbewegungen sind stabil, eine bekannte Tatsache, die hiermit nochmals bewiesen ist. Weiterhin gilt:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ist} \quad 4\,C_{min} > D_{max}^2 \\ \text{Ist} \quad 4\,C_{max} \leqq D_{min}^2\end{array}\right\} \quad \text{so liegt} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Typ I vor (schwache Dämpfung)} \\ \text{Typ II vor (starke Dämpfung)}\end{array}\right\} \tag{31}$$

Trifft keine der beiden Bedingungen zu, so sind Eigenbewegungen vom Typ I (gedämpfte Schwingungen) oder vom Typ II (Kriechbewegungen) oder von beiden Typen möglich.

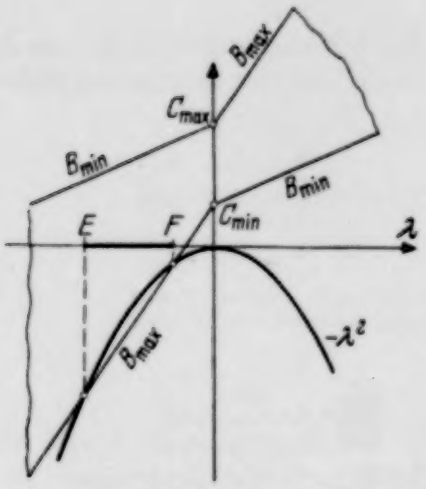


Abb. 10. Ermittlung des reellen Wurzelbereiches für positiv definite Matrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

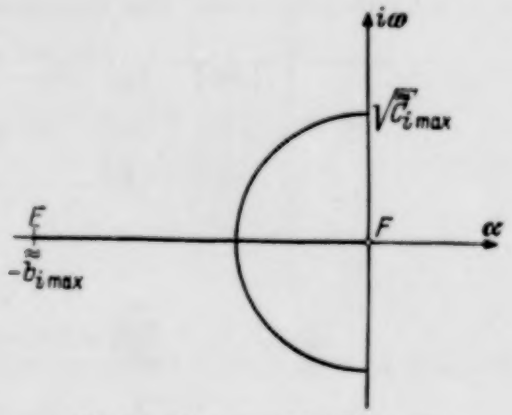


Abb. 11. Eingrenzung der Eigenwerte mit Hilfe der Abschätzung (35).

Der Wertebereich für etwa vorhandene reelle Wurzeln besteht nach Abb. 10 nur aus dem einen Stück $E\,F$; er wird begrenzt durch die beiden leicht zu berechnenden Werte

$$\lambda_{E,F} = -\,B_{max}/2 \pm \sqrt{B_{max}^2/4 - C_{min}}\,. \tag{32}$$

Wegen der vorausgesetzten positiven Definitheit aller drei Matrizen ist Null eine untere Schranke für B und C. Obere Schranken sind ebenfalls leicht angebbar, wenn $\mathfrak{A}$ von Diagonalform ist (was in fast allen praktischen Fällen zutrifft). Dann nämlich bilden wir zunächst die Zeilen — Betragssummen der Matrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$

$$\bar{b}_i = \sum_{k=1}^{n} |b_{ik}|\,, \qquad \bar{c}_i = \sum_{k=1}^{n} |c_{ik}| \tag{33}$$

und daraus die stets positiven reellen Quotienten

$$\bar{\bar{b}}_i = \frac{\bar{b}_i}{a_{ii}}\,, \quad \bar{\bar{c}} = \frac{\bar{c}_i}{a_{ii}}\,. \tag{34}$$

Der Einschließungssatz von *Gerschgorin* liefert dann für die beiden *Rayleigh*-Quotienten (24) die Abschätzung

$$0 \leqq B \leqq \bar{\bar{b}}_{i\,max}\,, \quad 0 \leqq C \leqq \bar{\bar{c}}_{i\,max}\,. \tag{35}$$

Der zugehörige Wurzelbereich besteht aus einem Halbkreis der komplexen Zahlenebene und der Strecke EF auf der negativen reellen Achse (Abb. 11).

8. Verallgemeinerung auf beliebige Matrizen. Jede quadratische Matrix R läßt sich darstellen in der Form

$$\mathfrak{R} = \hat{\mathfrak{R}} + i\,\hat{\hat{\mathfrak{R}}}\,, \tag{36}$$

wo die Anteile $\hat{\mathfrak{R}}$ und $\hat{\hat{\mathfrak{R}}}$ beide hermitesch sind. Die quadratische Gleichung (22) lautet daher bei beliebigen (reellen oder komplexen) Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$

$$\left(\hat{a} + i\,\hat{\hat{a}}\right)\lambda^2 + \left(\hat{b} + i\,\hat{\hat{b}}\right)\lambda + \left(\hat{c} + i\,\hat{\hat{c}}\right) = 0\,. \tag{37}$$

In dieser Gleichung treten sechs reelle hermitesche Formen auf; mit Hilfe ihrer Wertebereiche (oder wenigstens äußerer Schranken für sie) lassen sich auch jetzt wieder alle $2\,n$ Wurzeln in Gebiete einschließen, doch gehen wir nicht darauf ein.

Besonders einfach ist noch der Fall, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ hermitesch, $\mathfrak{B}$ dagegen schiefhermitesch ist (Kreiselwirkungen). Dann wird zunächst aus (23) wegen $1 = -i^2$

$$-i^2\lambda^2 - i^2\lambda B + C = 0\,. \tag{38}$$

Jetzt ist $iB = \tilde{B}$ reell; setzen wir daher $i\lambda = \sigma$, so geht (38) über in

$$\sigma^2 + \sigma \cdot \tilde{B} - C = 0\,, \tag{39}$$

und diese Gleichung wird wieder wie früher behandelt.

9. Beispiele. a) Erstes Beispiel. Gegeben ist das gedämpfte Schwingungssystem von Abb. 12 mit $n = 3$ Freiheitsgraden. Die Matrizen (15) lassen sich hier direkt aus der Zeichnung ablesen; es ist

$$\mathfrak{A} = m\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix},\quad \mathfrak{B} = d\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix},\quad \mathfrak{C} = c\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}.$$

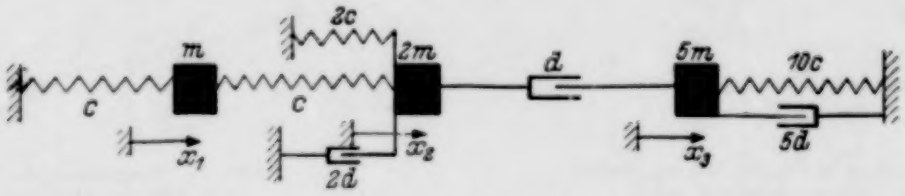


Abb. 12. Gedämpftes Schwingungssystem mit drei Freiheitsgraden, (Beispiel 1).

Alle drei Matrizen sind positiv definit, $\mathfrak{A}$ hat Diagonalform; also können wir die rohe Abschätzung (35) benutzen. Zunächst bilden wir die Zeilen-Betragssummen nach (33)

$$\tilde{b}_1 = 0\,, \qquad \tilde{c}_1 = 3\,,$$
$$\tilde{b}_2 = 4\,, \qquad \tilde{c}_2 = 4\,,$$
$$\tilde{b}_3 = 7\,, \qquad \tilde{c}_3 = 10\,,$$

daraus die Quotienten (34)

$$\tilde{\tilde{b}}_1 = \frac{0}{1} = 0\,, \qquad \tilde{\tilde{c}}_1 = \frac{3}{1} = 3\,,$$
$$\tilde{\tilde{b}}_2 = \frac{4}{2} = 2\,, \qquad \tilde{\tilde{c}}_2 = \frac{4}{2} = 2\,,$$
$$\tilde{\tilde{b}}_3 = \frac{7}{5} = 1{,}4\,, \qquad \tilde{\tilde{c}}_3 = \frac{10}{5} = 2$$

und haben damit nach (35) die Aussage

$$0 \leqq B \leqq 2\,, \quad 0 \leqq C \leqq 3\,.$$

Die zugehörigen Bereiche sind in Abb. 13 und 14 gestrichelt eingezeichnet.

Wesentlich engere Grenzen bekommen wir mit den exakten Eigenwerten β_i bzw. γ_i der Matrizenpaare $\mathfrak{B}, \mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{C}, \mathfrak{A}$, die sich hier leicht berechnen lassen. Man findet (in dimensionslosen Größen)

$$|\mathfrak{B} - \beta\,\mathfrak{A}| = (0 - \beta)\,(10\,\beta^2 - 27\,\beta + 17) = 0\,,$$
$$\beta_1 = 0\,, \quad \beta_2 = 1\,, \quad \beta_3 = 1{,}7\,,$$

das heißt nach (25)

$$B_{min} = 0\,, \quad B_{max} = 1{,}7\,,$$
$$|\mathfrak{C} - \gamma\,\mathfrak{A}| = (2\,\gamma^2 - 7\,\gamma + 5)\,(10 - 5\,\gamma) = 0\,,$$
$$\gamma_1 = 1\,, \quad \gamma_2 = 2\,, \quad \gamma_3 = 2{,}5\,,$$

somit nach (26)

$$C_{min} = 1\,, \quad C_{max} = 2{,}5\,.$$

Den Kennbereich in der (B, C)-Ebene zeigt Abb. 13; es liegt der Typ I vor, alle Eigenbewegungen sind stabil (starke Dämpfung). Der zugehörige Wurzelbereich besteht aus einem zerfallendem Kreisringgebiet (Abb. 14).

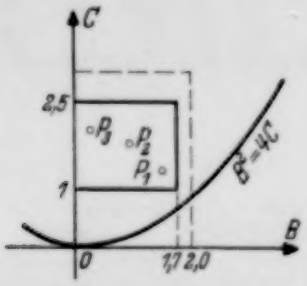


Abb. 13. Kennbereich und Kennpunkte für das Schwingungssystem von Abb. 12.

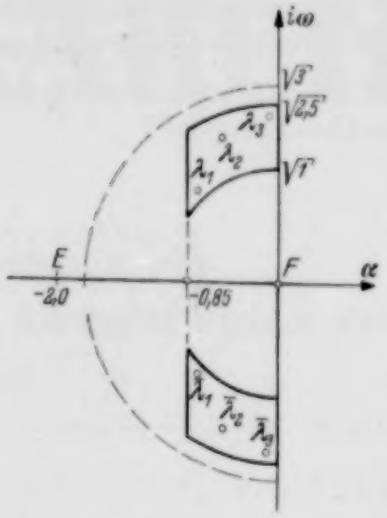


Abb. 14 (rechts). Eigenwertbereich und Eigenwerte für das Schwingungssystem von Abb. 12.

Zum Vergleich sind auch die exakten Werte aus der Gleichung (19) berechnet und in die Wertebereiche eingetragen worden, nämlich aus

$$p(\lambda) = 10\,\lambda^6 + 27\,\lambda^5 + 72\,\lambda^4 + 102\,\lambda^3 + 129\,\lambda^2 + 90\,\lambda + 50 = 0$$

i	λ_i [$\sqrt{\text{c/m}}$]	B_i [d/m]	C_i [c/m]
1	$-0{,}753 \pm 0{,}858\,i$	1,506	1,303
2	$-0{,}514 \pm 1{,}247\,i$	1,028	1,819
3	$-0{,}083 \pm 1{,}450\,i$	0,166	2,109

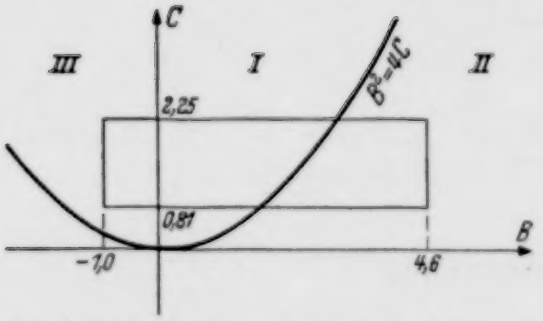


Abb. 15. Kennbereich für das Schwingungssystem Beispiel 2.

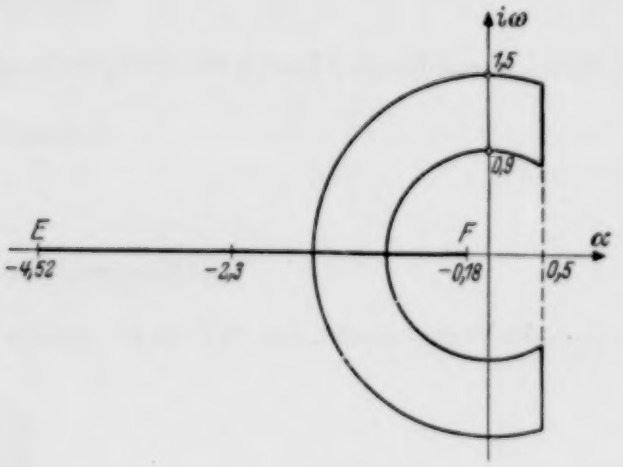


Abb. 16 (rechts). Eigenwertbereich für das Beispiel 2.

b) Zweites Beispiel: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ positiv definiert, $\mathfrak{B}$ indefinit, n beliebig. Der Kennbereich sei bekannt:

$$D_{min} = -1{,}00\,, \quad C_{min} = 0{,}81\,, \quad \sqrt{C_{min}} = 0{,}90\,,$$

$$D_{max} = +4{,}60\,, \quad C_{max} = 2{,}25\,, \quad \sqrt{C_{max}} = 1{,}50\,.$$

An Hand von Abb. 15 stellen wir fest, daß die Typen I, II und III in Betracht kommen. Der komplexe Wurzelbereich ist nun leicht zu zeichnen (Abb. 16), den reellen Bereich berechnen wir nach (32)

$$\lambda_{E,F} = -\frac{4{,}6}{2} \pm \sqrt{2{,}3^2 - 0{,}81}\,,$$

$$\lambda_E = -4{,}52\,, \quad \lambda_F = -0{,}18\,.$$

c) Drittes Beispiel: Schwingungssystem mit n Freiheitsgraden nach Abb. 17. Die $2n$ Eigenwerte $\lambda_i = \pm i\,\omega_i$ des ungedämpften Systems seien bekannt. Die Dämpfungen werden nachträglich angebracht.

Frage 1: Wie stark dürfen die d_i höchstens sein, damit noch alle Eigenbewegungen zum Typ I gehören (gedämpfte Schwingungen)?

Frage 2: Wie stark müssen die d_i mindestens sein, damit alle Eigenbewegungen zum Typ II gehören (Kriechbewegungen)?

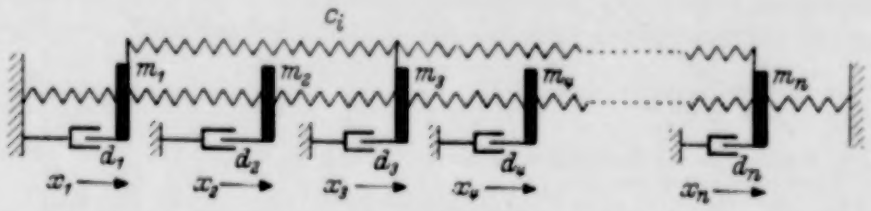


Abb. 17. Gedämpftes Schwingungssystem mit n Freiheitsgraden, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von Diagonalform, Beispiel 3.

In den gewählten Koordinaten sind die Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von Diagonalform, also sind ihre Eigenwerte

$$\beta_i = d_i/m_i\,, \qquad \text{somit} \qquad B_{min} = \left(\frac{d}{m}\right)_{min}, \quad B_{max} = \left(\frac{d}{m}\right)_{max}.$$

Nach (31) muß sein

$$4\,C_{min} > B_{max}^2\,,$$

das heißt hier

$$4\,\omega_{min}^2 > \left(\frac{d}{m}\right)_{max}^2,$$

also als Antwort auf Frage 1:

$$2\,\omega_{min} > \left(\frac{d}{m}\right)_{max}.$$

Die Antwort auf Frage 2 lautet dementsprechend

$$2\,\omega_{max} \leqq \left(\frac{d}{m}\right)_{min}.$$

(Eingegangen am 16. Februar 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. S. *Falk*, Braunschweig, Techn. Hochschule, Institut für Technische Mechanik